TRAITE' DE DYNAMIQUE, DANS LEQUEL LES LOIX DE L'EQUILIBRE & DU MOUVEMENT DES...

Alembert : d'

Digitized by Google

5.4 320

Digitized by Google

TRAITÉ

DE

DYNAMIQUE,

DANS LEQUEL LES LOIX DE L'E'QUILIBRE & du mouvement des Corps ſont réduites au plus petit nombre poſſible, & démontrées d'une maniere nouvelle, & où l'on donne un Principe général pour trouver le Mouvement de pluſieurs Corps qui agiſſent les uns ſur les autres d'une maniere quelconque.

Par M. D'ALEMBERT, de l'Académie Françoiſe, des Académies Royales des Sciences de France, de Pruſſe & d'Angleterre, de l'Académie Royale des Belles Lettres de Suède, & de l'Inſtitut de Bologne.

Nouvelle Edition, revûe & fort augmentée par l'Auteur.

A PARIS,

Chez DAVID, Libraire, rüe & vis-à-vis la grille des Mathurins.

M. DCC. LVIII.

AVEC APPROBATION ET PRIVILEGE DU ROI.

Digitized by Google

Digitized by Google

A MONSEIGNEUR

LE COMTE

D'ARGENSON,

MINISTRE D'ÉTAT.

MONSEIGNEUR,

L'ACCUEIL favorable que les Savans ont déja fait à ce fruit de mes travaux,

Digitized by Google

m'a inſpiré le déſir & la confiance de Vous l'offrir. Je ſouhaiterois l'avoir rendu digne de la poſtérité, pour faire parvenir juſqu'à elle le ſeul témoignage que je puiſſe vous donner de mon attachement & de ma reconnoiſſance. De toutes les vérités contenues dans cet Ouvrage, la plus précieuſe pour moi eſt l'expreſſion d'un ſentiment ſi noble & ſi juſte. Moins j'ai cherché les bienfaiteurs, moins je dois oublier ceux qui ont voulu être les miens, & les graces dont SA MAJESTÉ *m'a honoré, toujours préſentes à mon cœur, me rappelleront ſans ceſſe ce que je dois au Miniſtre qui me les a obtenues. Puiſſent,* MONSEIGNEUR, *les Sciences & les Lettres, fideles à conſerver le ſouvenir de ceux qui les ont aimées, célébrer d'une maniere digne de la France & de Vous*

Digitized by Google

tant d'établiſſemens glorieux à Votre Miniſtère, qui laiſſeront à Vos ſucceſſeurs l'honneur de les faire fleurir ! Puiſſiez-Vous goûter en paix dans votre retraite la conſolation que procure la vie privée, de ne point voir de trop près les malheurs des hommes ! Tels ſont, MONSEIGNEUR, les vœux d'un Citoyen à qui Votre proſpérité ſera toujours chere, & qui ſe trouve pour la premiere fois à plaindre de la médiocrité de ſon état, par le déſir qu'il auroit de donner plus d'éclat à ſon hommage. Je ſuis avec un profond reſpect,

MONSEIGNEUR,

Votre très-humble &
très-obéiſſant Serviteur
D'ALEMBERT.

Digitized by Google

EXTRAIT DES REGISTRES

DE L'ACADÉMIE ROYALE DES SCIENCES,

Du 26 Avril 1758.

MEssieurs DE MONTIGNY & BEZOUT, qui avoient été nommés pour examiner la seconde Edition que M. D'ALEMBERT se propose de donner de son *TRAITÉ DE DYNAMIQUE*, auquel il a fait plusieurs augmentations, en ayant fait leur rapport, l'Académie a jugé cet Ouvrage digne de l'impression; en foi de quoi j'ai signé le présent Certificat. A Paris ce 26 Avril 1758.

GRANDJEAN DE FOUCHY,
Sécretaire perpétuel de l'Acad. Royale des Sciences.

Digitized by Google

AVERTISSEMENT.

CETTE ſeconde Edition eſt augmentée de plus d'un tiers.

On a ajoûté au Diſcours préliminaire quelques réflexions ſur la queſtion des forces vives, & l'examen d'une autre queſtion importante, propoſée par l'Académie Royale des Sciences de Pruſſe, *ſi les loix de la Statique & de la Méchanique ſont de vérité néceſſaire ou contingente?*

Dans la premiere Partie de l'Ouvrage, ce qui regarde la meſure & la comparaiſon des forces accélératrices eſt expliqué avec beaucoup plus de détail que dans la premiere Edition, & contient ſur cette matiere des remarques qu'on ne trouvera point ailleurs; on a inſéré auſſi dans cette premiere Partie, pluſieurs nouvelles recherches ſur les loix de l'équilibre.

Digitized by Google

AVERTISSEMENT.

Les additions principales de la ſeconde Partie, ſont quelques propoſitions ſur l'état du centre de gravité de pluſieurs Corps qui agiſſent les uns ſur les autres ; la ſolution complette d'un Problême de Dynamique, qui n'avoit été qu'imparfaitement réſolu juſqu'ici, parcequ'on n'avoit pu ſéparer les indéterminées de l'équation finale (ce Problême ſe trouve art. 97 & ſuivans) ; une ſolution beaucoup plus ſimple du Problême V. ſur le mouvement d'un fil chargé de pluſieurs poids, avec un grand nombre de réflexions curieuſes ſur ce Problême ; une ſolution plus détaillée & en même tems plus ſimple du Problême des Corps qui vacillent ſur des plans ; enfin des recherches nouvelles & des obſervations importantes ſur le choc des Corps à reſſort. Je ne parle point de pluſieurs autres additions moins conſidérables répandues dans le corps de l'Ouvrage, & qui ont principalement pour but de développer davantage ce qui m'a paru

en

Digitized by Google

en avoir beſoin. Mais je ne dois pas laiſſer ignorer les obligations que j'ai à M. Bezout de l'Académie Royale des Sciences, qui a bien voulu me fournir pour cette Edition un grand nombre de notes, dont l'objet eſt de mettre l'Ouvrage à la portée d'un beaucoup plus grand nombre de Lecteurs qu'il ne l'étoit dans la premiere Edition. Ces notes, au nombre de plus de ſoixante, ſont au bas du Texte.

Quoique cette nouvelle Edition ſoit déja fort augmentée, mon deſſein étoit d'y ajoûter encore pluſieurs autres morceaux, la plûpart compoſés depuis long-tems, & qui ont tous rapport à la Dynamique. Ces morceaux étoient 1°. Des recherches ſur le mouvement d'un corps qui tourne autour d'un axe mobile; Problême du même genre que celui *de la préceſſion des Equinoxes;* l'Ouvrage que j'ai mis au jour ſur ce dernier ſujet en 1749 contient tous les principes néceſſaires pour réſoudre le Problême général dont il s'a-

Digitized by Google

git; & les recherches dont je parle ici, & que je voulois joindre à ce Traité, ne ſont que l'application de ces principes. 2°. Pluſieurs additions à l'Eſſai d'Hydrodynamique entiérement neuf que j'ai donné dans les Chap. VIII. & IX. de ma *Théorie de la réſiſtance des fluides*, publiée en 1752; ces additions ont pour objet de faire voir que cet Eſſai d'Hydrodynamique, quoique très-court, renferme une Méthode auſſi générale qu'on le puiſſe déſirer pour ſoumettre au calcul le mouvement des fluides, & de déterminer en même tems le petit nombre de cas dans leſquels on peut appliquer *rigoureuſement* le calcul à la recherche de ce mouvement. 3°. Une théorie des oſcillations des Corps flottans, pour ſervir de ſupplément à celle que j'avois ébauchée dans le Chapitre VI. de mon *Eſſai*, déja cité, *de la réſiſtance des fluides*. 4°. Un écrit aſſez étendu ſur les vibrations des cordes ſonores, en réponſe aux objec-

Digitized by Google

tions qui m'ont été faites ſur ce ſujet dans les *Mémoires de l'Académie de Berlin* de 1753, par deux grands Géometres, Mrs Bernoulli & Euler, diviſés d'ailleurs entr'eux, même dans ce qu'ils me conteſtent, puiſque l'un m'accorde ce que l'autre me nie. 5°. Enfin une démonſtration du principe de la compoſition des forces, à la vérité moins ſimple que celle qui a été donnée dans l'article 28. de cet Ouvrage, mais que je crois cependant n'être pas indifférente pour les Mathématiciens, par le moyen que j'ai trouvé de ſimplifier la démonſtration très-ingénieuſe de ce même principe, qu'on peut lire dans le premier Tome des *Mémoires de Péterſbourg*. Mais ces différentes additions, quoique toutes intéreſſantes par leur objet, auroient trop groſſi le Volume que je mets au jour; je me propoſe donc de les publier, enſemble ou ſéparément, dans quelqu'autre occaſion.

Digitized by Google

FAUTES A CORRIGER.

Page 31, *lig.* 6 & 7, *lisez* ; L'équation trouvée $ddc = \phi dt^2$, appartient à la courbe rigoureuse & à la courbe polygone.

Page 116, *lig.* 5 *à compter d'en bas*, *au lieu de* $(C + \gamma u)^2$, *lisez* $H(Cu + \gamma)^2$.

Page 136, *lig.* 2 *à compter d'en bas*, *au lieu de* $-My$, *lisez* $-My$.

Page 191, *lig.* 11, *au lieu de* at, lisez dt.

Page 194, *lig.* 4, *au lieu de* $2ab$, lisez $2a$.

Page 255, *lig.* 1 *de la note*, *au lieu de* Fig. 15. *lisez* Fig. 11.

DISCOURS

Digitized by Google

DISCOURS PRÉLIMINAIRE.

LA certitude des Mathématiques eſt un avantage que ces Sciences doivent principalement à la ſimplicité de leur objet. Il faut avouer même, que comme toutes les parties des Mathématiques n'ont pas un objet également ſimple, auſſi la certitude proprement dite, celle qui eſt fondée ſur des principes néceſſairement vrais & évidens par eux-mêmes, n'appartient ni également, ni de la même maniere à toutes ces parties. Pluſieurs d'entr'elles, appuyées ſur des principes Phyſiques, c'eſt-à-dire ſur des vérités d'expérience, ou ſur de ſimples hypotheſes, n'ont, pour ainſi dire, qu'une certitude d'expérience, ou même de pure ſuppoſition. Il n'y a, pour parler exactement, que celles qui traitent du calcul des grandeurs, & des propriétés générales de l'étendue, c'eſt-à-dire l'Algébre, la Géométrie & la Méchanique, qu'on puiſſe regarder comme

Digitized by Google

marquées au ſceau de l'évidence. Encore y a-t-il dans la lumiere que ces Sciences préſentent à notre eſprit, une eſpece de gradation, &, pour ainſi dire, de nuance à obſerver. Plus l'objet qu'elles embraſſent eſt étendu, & conſidéré d'une maniere générale & abſtraite, plus auſſi leurs principes ſont exempts de nuages & faciles à ſaiſir. C'eſt par cette raiſon que la Géométrie eſt plus ſimple que la Méchanique, & l'une & l'autre moins ſimples que l'Algébre. Ce paradoxe ne paroîtra point tel à ceux qui ont étudié ces Sciences en Philoſophes : les notions les plus abſtraites, celles que le commun des hommes regarde comme les plus inacceſſibles, ſont ſouvent celles qui portent avec elles une plus grande lumiere : l'obſcurité ſemble s'emparer de nos idées à meſure que nous examinons dans un objet plus de propriétés ſenſibles ; l'impénétrabilité, ajoûtée à l'idée de l'étendue, ſemble ne nous offrir qu'un myſtere de plus ; la nature du mouvement eſt une énigme pour les Philoſophes ; le principe Métaphyſique des loix de la percuſſion ne leur eſt pas moins caché ; en un mot plus ils approfondiſſent l'idée qu'ils ſe forment de la matiere, & des propriétés qui la repréſentent, plus cette idée s'obſcurcit & paroît vouloir leur échapper ;

Digitized by Google

plus ils se persuadent que l'existence des objets extérieurs, appuyée sur le témoignage équivoque de nos sens, est ce que nous connoissons le moins imparfaitement en eux.

Il résulte de ces réflexions, que pour traiter suivant la meilleure Méthode possible quelque partie des Mathématiques que ce soit (nous pourrions même dire quelque Science que ce puisse être) il est nécessaire non-seulement d'y introduire & d'y appliquer autant qu'il se peut, des connoissances puisées dans des Sciences plus abstraites, & par conséquent plus simples, mais encore d'envisager de la maniere la plus abstraite & la plus simple qu'il se puisse, l'objet particulier de cette Science; de ne rien supposer, ne rien admettre dans cet objet, que les propriétés que la Science même qu'on traite y suppose. Delà résultent deux avantages : les principes reçoivent toute la clarté dont ils sont susceptibles : ils se trouvent d'ailleurs réduits au plus petit nombre possible, & par ce moyen ils ne peuvent manquer d'acquérir en même tems plus d'étendue, puisque l'objet d'une Science étant nécessairement déterminé, les principes en sont d'autant plus féconds, qu'ils sont en plus petit nombre.

Digitized by Google

On a penſé depuis long-tems, & même avec ſuccès, à remplir dans les Mathématiques, une partie du plan que nous venons de tracer : on a appliqué heureuſement, l'Algébre à la Géométrie, la Géométrie à la Méchanique, & chacune de ces trois Sciences à toutes les autres, dont elles ſont la baſe & le fondement. Mais on n'a pas été ſi attentif, ni à réduire les principes de ces Sciences au plus petit nombre, ni à leur donner toute la clarté qu'on pouvoit déſirer. La Méchanique ſurtout, eſt celle qu'il paroît qu'on a négligée le plus à cet égard : auſſi la plûpart de ſes principes, ou obſcurs par eux-mêmes, ou énoncés & démontrés d'une maniere obſcure, ont-ils donné lieu à pluſieurs queſtions épineuſes. En général, on a été plus occupé juſqu'à préſent à augmenter l'édifice qu'à en éclairer l'entrée ; & on a penſé principalement à l'élever, ſans donner à ſes fondemens toute la ſolidité convenable.

Je me ſuis propoſé dans cet Ouvrage de ſatisfaire à ce double objet, de reculer les limites de la Méchanique, & d'en applanir l'abord ; & mon but principal a été de remplir en quelque ſorte un de ces objets par l'autre, c'eſt-à-dire, non-ſeulement de déduire les principes de la Méchanique des notions les plus claires, mais de les ap-

Digitized by Google

pliquer auſſi à de nouveaux uſages; de faire voir tout à la fois, & l'inutilité de pluſieurs principes qu'on avoit employés juſqu'ici dans la Méchanique, & l'avantage qu'on peut tirer de la combinaiſon des autres pour le progrès de cette Science; en un mot, d'étendre les principes en les réduiſant. Telles ont été mes vûes dans le Traité que je mets au jour. Pour faire connoître au Lecteur les moyens par leſquels j'ai tâché de les remplir, il ne ſera peut-être pas inutile d'entrer ici dans un examen raiſonné de la Science que j'ai entrepris de traiter.

Le Mouvement & ſes propriétés générales, ſont le premier & le principal objet de la Méchanique; cette Science ſuppoſe l'exiſtence du Mouvement, & nous la ſuppoſerons auſſi comme avouée & reconnue de tous les Phyſiciens. A l'égard de la nature du Mouvement, les Philoſophes ſont au contraire fort partagés là-deſſus. Rien n'eſt plus naturel, je l'avoue, que de concevoir le Mouvement comme l'application ſucceſſive du mobile aux différentes parties de l'eſpace indéfini, que nous imaginons comme le lieu des corps: mais cette idée ſuppoſe un eſpace dont les parties ſoient pénétrables & immobiles; or perſonne n'ignore que les Cartéſiens (Secte

Digitized by Google

qui à la vérité n'exiſte preſque plus aujourd'hui) ne reconnoiſſent point d'eſpace diſtingué des corps, & qu'ils regardent l'étendue & la matiere comme une même choſe. Il faut convenir qu'en partant d'un pareil principe, le Mouvement ſeroit la choſe la plus difficile à concevoir, & qu'un Cartéſien auroit peut-être beaucoup plutôt fait d'en nier l'éxiſtence, que de chercher à en définir la nature. Au reſte, quelque abſurde que nous paroiſſe l'opinion de ces Philoſophes, & quelque peu de clarté & de préciſion qu'il y ait dans les Principes Métaphyſiques ſur leſquels ils s'efforcent de l'appuyer, nous n'entreprendrons point de la réfuter ici : nous nous contenterons de remarquer, que pour avoir une idée claire du Mouvement, on ne peut ſe diſpenſer de diſtinguer au moins par l'eſprit deux ſortes d'étendue : l'une, qui ſoit regardée comme impénétrable, & qui conſtitue ce qu'on appelle proprement les corps ; l'autre, qui étant conſidérée ſimplement comme étendue, ſans examiner ſi elle eſt pénétrable ou non, ſoit la meſure de la diſtance d'un corps à un autre, & dont les parties enviſagées comme fixes & immobiles, puiſſent ſervir à juger du repos ou du mouvement des corps. Il nous ſera donc toujours permis de concevoir un eſpa-

Digitized by Google

ce indéfini comme le lieu des corps, ſoit réel, ſoit ſuppoſé, & de regarder le Mouvement comme le tranſport du mobile d'un lieu dans un autre.

La conſidération du Mouvement entre quelquefois dans les recherches de Géométrie pure; c'eſt ainſi qu'on imagine ſouvent les lignes, droites ou courbes, engendrées par le Mouvement continu d'un point, les ſurfaces par le Mouvement d'une ligne, les ſolides enfin par celui d'une ſurface. Mais il y a entre la Méchanique & la Géométrie cette différence, non-ſeulement que dans celle-ci, la génération des Figures par le Mouvement eſt, pour ainſi dire, arbitraire, & de pure élégance, mais encore que la Géométrie ne conſidere dans le Mouvement que l'eſpace parcouru, au lieu que dans la Méchanique on a égard de plus au tems que le mobile employe à parcourir cet eſpace.

On ne peut comparer enſemble deux choſes d'une nature différente, telles que l'eſpace & le tems : mais on peut comparer le rapport des parties du tems avec celui des parties de l'eſpace parcouru. Le tems par ſa nature coule uniformément, & la Méchanique ſuppoſe cette uniformité. Du reſte, ſans connoître le tems en lui-même

Digitized by Google

& ſans en avoir de meſure préciſe, nous ne pouvons repréſenter plus clairement le rapport de ſes parties, que par celui des portions d'une ligne droite indéfinie. Or l'analogie qu'il y a entre le rapport des parties d'une telle ligne, & celui des parties de l'eſpace parcouru par un corps qui ſe meut d'une maniere quelconque, peut toujours être exprimée par une équation: on peut donc imaginer une courbe, dont les abſciſſes repréſentent les portions du tems écoulé depuis le commencement du Mouvement, les ordonnées correſpondantes déſignant les eſpaces parcourus durant ces portions de tems: l'équation de cette courbe exprimera, non le rapport des tems aux eſpaces, mais, ſi on peut parler ainſi, le rapport du rapport que les parties de tems ont à leur unité, à celui que les parties de l'eſpace parcouru ont à la leur. Car l'équation d'une courbe peut être conſidérée, ou comme exprimant le rapport des ordonnées aux abſciſſes, ou comme l'équation entre le rapport que les ordonnées ont à leur unité, & le rapport que les abſciſſes correſpondantes ont à la leur.

Il eſt donc évident que par l'application ſeule de la Géométrie & du calcul, on peut, ſans le ſecours d'aucun autre principe, trouver les propriétés

priétés générales du Mouvement, varié ſuivant une loi quelconque. Mais comment arrive-t-il que le Mouvement d'un corps ſuive telle ou telle loi particuliere? C'eſt ſur quoi la Géométrie ſeule ne peut rien nous apprendre, & c'eſt auſſi ce qu'on peut regarder comme le premier Problême qui appartienne immédiatement à la Méchanique.

On voit d'abord fort clairement, qu'un corps ne peut ſe donner le Mouvement à lui-même. Il ne peut donc être tiré du repos, que par l'action de quelque cauſe étrangere. Mais continue-t-il à ſe mouvoir de lui-même, ou a-t-il beſoin pour ſe mouvoir de l'action répétée de la cauſe? Quelque parti qu'on pût prendre là-deſſus, il ſera toujours inconteſtable, que l'exiſtence du Mouvement étant une fois ſuppoſée ſans aucune autre hypotheſe particuliere, la loi la plus ſimple qu'un mobile puiſſe obſerver dans ſon Mouvement, eſt la loi d'uniformité, & c'eſt par conſéquent celle qu'il doit ſuivre, comme on le verra plus au long dans le premier Chapitre de ce Traité. Le Mouvement eſt donc uniforme par ſa nature: j'avoue que les preuves qu'on a données juſqu'à préſent de ce principe, ne ſont peut-être pas fort convaincantes: on verra dans mon Ouvrage les dif-

Digitized by Google

ficultés qu'on peut y oppoſer, & le chemin que j'ai pris pour éviter de m'engager à les réſoudre. Il me ſemble que cette loi d'uniformité eſſentielle au Mouvement conſidéré en lui-même, fournit une des meilleures raiſons ſur leſquelles la meſure du tems par le Mouvement uniforme puiſſe être appuyée. Auſſi j'ai cru devoir entrer là-deſſus dans quelque détail, quoiqu'au fond cette diſcuſſion puiſſe paroître étrangere à la Méchanique.

La *force d'inertie*, c'eſt-à-dire la propriété qu'ont les Corps de perſévérer dans leur état de repos ou de Mouvement, étant une fois établie, il eſt clair que le Mouvement, qui a beſoin d'une cauſe pour commencer au moins à exiſter, ne ſauroit non plus être accéléré ou retardé que par une cauſe étrangere. Or quelles ſont les cauſes capables de produire ou de changer le Mouvement dans les Corps? Nous n'en connoiſſons juſqu'à préſent que de deux ſortes: les unes ſe manifeſtent à nous en même-tems que l'effet qu'elles produiſent, ou plutôt dont elles ſont l'occaſion: ce ſont celles qui ont leur ſource dans l'action ſenſible & mutuelle des Corps, réſultante de leur impénétrabilité: elles ſe réduiſent à l'impulſion & à quelques autres actions dérivées de

Digitized by Google

celle-là : toutes les autres causes ne se font connoître que par leur effet, & nous en ignorons entiérement la nature : telle est la cause qui fait tomber les Corps pesans vers le centre de la Terre, celle qui retient les Planètes dans leurs orbites, &c.

Nous verrons bientôt comment on peut déterminer les effets de l'impulsion, & des causes qui peuvent s'y rapporter : pour nous en tenir à celles de la seconde espece, il est clair que lorsqu'il est question des effets produits par de telles causes, ces effets doivent toujours être donnés indépendamment de la connoissance de la cause, puisqu'ils ne peuvent en être déduits : c'est ainsi que sans connoître la cause de la pesanteur, nous apprenons par l'expérience que les espaces décrits par un Corps qui tombe, sont entr'eux comme les quarrés des tems. En général, dans les Mouvemens variés dont les causes sont inconnues, il est évident que l'effet produit par la cause, soit dans un tems fini, soit dans un instant, doit toujours être donné par l'équation entre les tems & les espaces : cet effet une fois connu, & le principe de la force d'inertie supposé, on n'a plus besoin que de la Géométrie seule & du calcul, pour découvrir les propriétés de

Digitized by Google

ces ſortes de Mouvemens. Pourquoi donc aurions-nous recours à ce principe dont tout le monde fait uſage aujourd'hui, que la force accélératrice ou retardatrice eſt proportionnelle à l'élément de la viteſſe ? principe appuyé ſur cet unique axiome vague & obſcur, que l'effet eſt proportionnel à ſa cauſe. Nous n'examinerons point ſi ce principe eſt de vérité néceſſaire ; nous avouerons ſeulement que les preuves qu'on en a apportées juſqu'ici, ne nous paroiſſent pas hors d'atteinte : nous ne l'adopterons pas non plus, avec quelques Géometres, comme de vérité purement contingente, ce qui ruineroit la certitude de la Méchanique, & la réduiroit à n'être plus qu'une Science expérimentale : nous nous contenterons d'obſerver, que vrai ou douteux, clair ou obſcur, il eſt inutile à la Méchanique, & que par conſéquent il doit en être banni.

Nous n'avons fait mention juſqu'à préſent, que du changement produit dans la viteſſe du mobile par les cauſes capables d'altérer ſon Mouvement : & nous n'avons point encore cherché ce qui doit arriver, ſi la cauſe motrice tend à mouvoir le corps dans une direction différente de celle qu'il a déja. Tout ce que nous apprend dans ce cas le principe de la force d'inertie, c'eſt que le mobi-

Digitized by Google

le ne peut tendre qu'à décrire une ligne droite, & à la décrire uniformément : mais cela ne fait connoître ni ſa viteſſe ni ſa direction. On eſt donc obligé d'avoir recours à un ſecond principe, c'eſt celui qu'on appelle la compoſition des Mouvemens, & par lequel on détermine le Mouvement unique d'un Corps qui tend à ſe mouvoir ſuivant différentes directions à la fois avec des viteſſes données. On trouvera dans cet Ouvrage une démonſtration nouvelle de ce principe, dans laquelle je me ſuis propoſé, & d'éviter toutes les difficultés auxquelles ſont ſujettes les démonſtrations qu'on en donne communément, & en même-tems de ne pas déduire d'un grand nombre de propoſitions compliquées, un principe qui étant l'un des premiers de la Méchanique, doit néceſſairement être appuyé ſur des preuves ſimples & faciles.

Comme le Mouvement d'un Corps qui change de direction, peut être regardé comme compoſé du Mouvement qu'il avoit d'abord & d'un nouveau Mouvement qu'il a reçû, de même le Mouvement que le Corps avoit d'abord peut être regardé comme compoſé du nouveau Mouvement qu'il a pris, & d'un autre qu'il a perdu. De-là il s'enſuit que les loix du Mouvement changé-

Digitized by Google

par quelques obſtacles que ce puiſſe être, dépendent uniquement des loix du Mouvement détruit par ces mêmes obſtacles. Car il eſt évident qu'il ſuffit de décompoſer le Mouvement qu'avoit le Corps avant la rencontre de l'obſtacle, en deux autres Mouvemens, tels, que l'obſtacle ne nuiſe point à l'un, & qu'il anéantiſſe l'autre. Par-là, on peut non-ſeulement démontrer les loix du Mouvement changé par des obſtacles inſurmontables, les ſeules qu'on ait trouvées juſqu'à préſent par cette Méthode; on peut encore déterminer dans quel cas le Mouvement eſt détruit par ces mêmes obſtacles. A l'égard des loix du Mouvement changé par des obſtacles qui ne ſont pas inſurmontables en eux-mêmes, il eſt clair par la même raiſon, qu'en général il ne faut pour déterminer ces loix, qu'avoir bien conſtaté celles de l'équilibre.

Or quelle doit être la loi générale de l'équilibre des Corps! Tous les Géometres conviennent, que deux Corps dont les directions ſont oppoſées, ſe font équilibre quand leurs maſſes ſont en raiſon inverſe des viteſſes avec leſquelles ils tendent à ſe mouvoir; mais il n'eſt peut-être pas facile de démontrer cette loi en toute rigueur, & d'une maniere qui ne renferme aucune

Digitized by Google

obſcurité ; auſſi la plûpart des Géometres ont-ils mieux aimé la traiter d'axiome, que de s'appliquer à la prouver. Cependant, ſi l'on y fait attention, on verra qu'il n'y a qu'un ſeul cas où l'équilibre ſe manifeſte d'une maniere claire & diſtincte ; c'eſt celui où les maſſes des deux Corps ſont égales, & leurs viteſſes égales & oppoſées. Le ſeul parti qu'on puiſſe prendre, ce me ſemble, pour démontrer l'équilibre dans les autres cas, eſt de les réduire, s'il ſe peut, à ce premier cas ſimple & évident par lui-même. C'eſt auſſi ce que j'ai tâché de faire ; le Lecteur jugera ſi j'y ai réuſſi.

Le Principe de l'équilibre joint à ceux de la force d'inertie & du Mouvement compoſé, nous conduit donc à la ſolution de tous les Problêmes où l'on conſidere le Mouvement d'un Corps, en tant qu'il peut être altéré par un obſtacle impénétrable & mobile, c'eſt-à-dire en général par un autre Corps à qui il doit néceſſairement communiquer du Mouvement pour conſerver au moins une partie du ſien. De ces Principes combinés on peut donc aiſément déduire les loix du Mouvement des Corps qui ſe choquent d'une maniere quelconque, ou qui ſe tirent par le moyen de quelque Corps interpoſé entr'eux, & auquel ils ſont attachés.

Digitized by Google

Si les Principes de la force d'inertie, du Mouvement composé, & de l'équilibre, sont essentiellement différens l'un de l'autre, comme on ne peut s'empêcher d'en convenir ; & si d'un autre côté, ces trois Principes suffisent à la Méchanique, c'est avoir réduit cette Science au plus petit nombre de Principes possible, que d'avoir établi sur ces trois Principes toutes les loix du Mouvement des Corps dans des circonstances quelconques, comme j'ai tâché de le faire dans ce Traité.

A l'égard des démonstrations de ces Principes en eux-mêmes, le plan que j'ai suivi pour leur donner toute la clarté & la simplicité dont elles m'ont paru susceptibles, a été de les déduire toujours de la considération seule du Mouvement, envisagé de la maniere la plus simple & la plus claire. Tout ce que nous voyons bien distinctement dans le Mouvement d'un Corps, c'est qu'il parcourt un certain espace, & qu'il employe un certain tems à le parcourir. C'est donc de cette seule idée qu'on doit tirer tous les Principes de la Méchanique, quand on veut les démontrer d'une maniere nette & précise ; ainsi on ne sera point surpris qu'en conséquence de cette réflexion, j'aie, pour ainsi dire, détourné la vûe de dessus

Digitized by Google

deſſus les *cauſes motrices*, pour n'enviſager uniquement que le Mouvement qu'elles produiſent; que j'aie entiérement proſcrit les forces inhérentes au Corps en Mouvement, êtres obſcurs & Métaphyſiques, qui ne ſont capables que de répandre les ténèbres ſur une Science claire par elle-même.

C'eſt par cette raiſon que j'ai cru ne devoir point entrer dans l'examen de la fameuſe queſtion des *forces vives*. Cette queſtion qui depuis trente ans partage les Géometres, conſiſte à ſavoir, ſi la force des Corps en Mouvement eſt proportionnelle au produit de la maſſe par la viteſſe, ou au produit de la maſſe par le quarré de la viteſſe: par exemple, ſi un Corps double d'un autre, & qui a trois fois autant de viteſſe, a dix-huit fois autant de force ou ſix fois autant ſeulement. Malgré les diſputes que cette queſtion a cauſées, l'inutilité parfaite dont elle eſt pour la Méchanique, m'a engagé à n'en faire aucune mention dans l'Ouvrage que je donne aujourd'hui: je ne crois pas néanmoins devoir paſſer entiérement ſous ſilence une opinion, dont *Leibnitz* a cru pouvoir ſe faire honneur comme d'une découverte; que le grand *Bernoulli* a depuis ſi ſavamment & ſi heureuſement appro-

fondie (*) ; que *Mac-Laurin* a fait tous ſes efforts pour renverſer ; & à laquelle enfin les écrits d'un grand nombre de Mathématiciens illuſtres ont contribué à intéreſſer le Public. Ainſi, ſans fatiguer le Lecteur par le détail de tout ce qui a été dit ſur cette queſtion, il ne ſera pas hors de propos d'expoſer ici très-ſuccinctement les Principes qui peuvent ſervir à la réſoudre.

Quand on parle de la force des Corps en Mouvement, ou l'on n'attache point d'idée nette au mot qu'on prononce, ou l'on ne peut entendre par-là en général, que la propriété qu'ont les Corps qui ſe meuvent, de vaincre les obſtacles qu'ils rencontrent, ou de leur réſiſter. Ce n'eſt donc ni par l'eſpace qu'un Corps parcourt uniformément, ni par le tems qu'il employe à le parcourir, ni enfin par la conſidération ſimple, unique & abſtraite de ſa maſſe & de ſa viteſſe qu'on doit eſtimer immédiatement la force ; c'eſt uniquement par les obſtacles qu'un Corps rencontre, & par la réſiſtance que lui font ces obſta-

(*) Voyez le Diſcours ſur les loix de la communication du Mouvement, qui a mérité l'éloge de l'Académie en l'année 1726. où le P. *Mazière* remporta le prix. La raiſon pour laquelle la piece de M. *Bernoulli* ne fut point couronnée, ſe trouve dans l'éloge que j'ai publié de ce grand Géometre, quelques mois après ſa mort, arrivée au commencement de 1748.

Digitized by Google

cles. Plus l'obſtacle qu'un Corps peut vaincre, ou auquel il peut réſiſter, eſt conſidérable, plus on peut dire que ſa *force* eſt grande, pourvû que ſans vouloir repréſenter par ce mot un prétendu être qui réſide dans le Corps, on ne s'en ſerve que comme d'une maniere abrégée d'exprimer un fait, à peu près comme on dit qu'un Corps a deux fois autant de *viteſſe* qu'un autre, au lieu de dire qu'il parcourt en tems égal deux fois autant d'eſpace, ſans prétendre pour cela que ce mot de *viteſſe* repréſente un être inhérent au corps.

Ceci bien entendu, il eſt clair qu'on peut oppoſer au Mouvement d'un Corps trois ſortes d'obſtacles; ou des obſtacles invincibles qui anéantiſſent tout-à-fait ſon Mouvement, quel qu'il puiſſe être; ou des obſtacles qui n'ayent préciſément que la réſiſtance néceſſaire pour anéantir le Mouvement du Corps, & qui l'anéantiſſent dans un inſtant, c'eſt le cas de l'équilibre; ou enfin des obſtacles qui anéantiſſent le Mouvement peu à peu, c'eſt le cas du Mouvement retardé. Comme les obſtacles inſurmontables anéantiſſent également toutes ſortes de Mouvemens, ils ne peuvent ſervir à faire connoître la force : ce n'eſt donc que dans l'équilibre, ou

Digitized by Google

dans le Mouvement retardé qu'on doit en chercher la mesure. Or tout le monde convient qu'il y a équilibre entre deux Corps, quand les produits de leurs masses par leurs vitesses virtuelles, c'est-à-dire par les vitesses avec lesquelles ils tendent à se mouvoir, sont égaux de part & d'autre. Donc dans l'équilibre le produit de la masse par la vitesse, ou, ce qui est la même chose, la quantité de Mouvement, peut représenter la force. Tout le monde convient aussi que dans le Mouvement retardé, le nombre des obstacles vaincus est comme le quarré de la vitesse; enforte qu'un Corps qui a fermé un ressort, par exemple, avec une certaine vitesse, pourra avec une vitesse double fermer, ou tout à la fois, ou successivement, non pas deux, mais quatre ressorts semblables au premier, neuf avec une vitesse triple, & ainsi du reste. D'où les partisans des forces vives concluent que la force des Corps qui se meuvent actuellement, est en général comme le produit de la masse par le quarré de la vitesse. Au fond, quel inconvénient pourroit-il y avoir à ce que la mesure des forces fût différente dans l'équilibre & dans le Mouvement retardé, puisque, si on veut ne raisonner que d'après des idées claires, on doit n'entendre par le

Digitized by Google

mot de *force*, que l'effet produit en ſurmontant l'obſtacle ou en lui réſiſtant ? Il faut avouer cependant que l'opinion de ceux qui regardent la force comme le produit de la maſſe par la viteſſe, peut avoir lieu non-ſeulement dans le cas de l'équilibre, mais auſſi dans celui du Mouvement retardé, ſi dans ce dernier cas on meſure la force, non par la quantité abſolue des obſtacles, mais par la ſomme des réſiſtances de ces mêmes obſtacles. Car on ne ſauroit douter que cette ſomme de réſiſtances ne ſoit proportionnelle à la quantité de Mouvement, puiſque, de l'aveu de tout le monde, la quantité de Mouvement que le Corps perd à chaque inſtant, eſt proportionnelle au produit de la réſiſtance par la durée infiniment petite de l'inſtant, & que la ſomme de ces produits eſt évidemment la réſiſtance totale. Toute la difficulté ſe réduit donc à ſavoir ſi on doit meſurer la force par la quantité abſolue des obſtacles, ou par la ſomme de leurs réſiſtances. Il paroîtroit plus naturel de meſurer la force de cette derniere maniere ; car un obſtacle n'eſt tel qu'entant qu'il réſiſte, & c'eſt, à proprement parler, la ſomme des réſiſtances qui eſt l'obſtacle vaincu : d'ailleurs, en eſtimant ainſi la force, on a l'avantage d'avoir pour l'équilibre &

Digitized by Google

pour le Mouvement retardé une meſure commune : néanmoins comme nous n'avons d'idée préciſe & diſtincte du mot de *force*, qu'en reſtraignant ce terme à exprimer un effet, je crois qu'on doit laiſſer chacun le maître de ſe décider comme il voudra là-deſſus ; & toute la queſtion ne peut plus conſiſter, que dans une diſcuſſion Métaphyſique très-futile, ou dans une diſpute de mots plus indigne encore d'occuper des Philoſophes.

Tout ce que nous venons de dire ſuffit aſſez pour le faire ſentir à nos Lecteurs. Mais une réflexion bien naturelle achevera de les en convaincre. Soit qu'un Corps ait une ſimple tendance à ſe mouvoir avec une certaine viteſſe, tendance arrêtée par quelque obſtacle ; ſoit qu'il ſe meuve réellement & uniformément avec cette viteſſe ; ſoit enfin qu'il commence à ſe mouvoir avec cette même viteſſe, laquelle ſe conſume & s'anéantiſſe peu à peu par quelque cauſe que ce puiſſe être ; dans tous ces cas, l'effet produit par le Corps eſt différent, mais le Corps conſidéré en lui-même n'a rien de plus dans un cas que dans un autre ; ſeulement l'action de la cauſe qui produit l'effet eſt différemment appliquée. Dans le premier cas, l'effet ſe réduit à une ſimple tendan-

Digitized by Google

ce, qui n'a point proprement de meſure préciſe, puiſqu'il n'en réſulte aucun mouvement ; dans le ſecond, l'effet eſt l'eſpace parcouru uniformément dans un tems donné, & cet effet eſt proportionnel à la viteſſe ; dans le troiſiéme, l'effet eſt l'eſpace parcouru juſqu'à l'extinction totale du Mouvement, & cet effet eſt comme le quarré de la viteſſe. Or ces différens effets ſont évidemment produits par une même cauſe ; donc ceux qui ont dit que la force étoit tantôt comme la viteſſe, tantôt comme ſon quarré, n'ont pu entendre parler que de l'effet, quand ils ſe ſont exprimés de la ſorte. Cette diverſité d'effets provenans tous d'une même cauſe, peut ſervir, pour le dire en paſſant, à faire voir le peu de juſteſſe & de préciſion de l'axiome prétendu, ſi ſouvent mis en uſage, ſur la proportionalité des cauſes à leurs effets.

Enfin ceux mêmes qui ne ſeroient pas en état de remonter juſqu'aux Principes Métaphyſiques de la queſtion des forces vives, verront aiſément qu'elle n'eſt qu'une diſpute de mots, s'ils conſiderent que les deux partis ſont d'ailleurs entiérement d'accord ſur les principes fondamentaux de l'équilibre & du mouvement. Qu'on propoſe le même Problême de Méchanique à réſoudre à

Digitized by Google

deux Géometres, dont l'un ſoit adverſaire & l'autre partiſan des forces vives, leurs ſolutions, ſi elles ſont bonnes, ſeront toujours parfaitement d'accord; la queſtion de la meſure des forces eſt donc entiérement inutile à la Méchanique, & même ſans aucun objet réel. Auſſi n'auroit-elle pas ſans doute enfanté tant de volumes, ſi on ſe fût attaché à diſtinguer ce qu'elle renfermoit de clair & d'obſcur. En s'y prenant ainſi, on n'auroit eu beſoin que de quelques lignes pour décider la queſtion : mais il ſemble que la plûpart de ceux qui ont traité cette matiere, ayent craint de la traiter en peu de mots.

La réduction que nous avons faite de toutes les loix de la Méchanique à trois, celle de la force d'inertie, celle du mouvement compoſé, & celle de l'équilibre, peut ſervir à réſoudre le grand Problême Métaphyſique, propoſé depuis peu par une des plus célébres Académies de l'Europe, *ſi les loix de la Statique & de la Méchanique ſont de vérité néceſſaire ou contingente?* Pour fixer nos idées ſur cette queſtion, il faut d'abord la réduire au ſeul ſens raiſonnable qu'elle puiſſe avoir. Il ne s'agit pas de décider ſi l'Auteur de la nature auroit pu lui donner d'autres loix que celles que nous y obſervons; dès qu'on admet

Digitized by Google

admet un être intelligent capable d'agir ſur la matiere, il eſt évident que cet être peut à chaque inſtant la mouvoir & l'arrêter à ſon gré, ou ſuivant des loix uniformes, ou ſuivant des loix qui ſoient différentes pour chaque inſtant & pour chaque partie de matiere; l'expérience continuelle des mouvemens de notre corps, nous prouve aſſez que la matiere, ſoumiſe à la volonté d'un principe penſant, peut s'écarter dans ſes mouvemens de ceux qu'elle auroit véritablement ſi elle étoit abandonnée à elle-même. La queſtion propoſée ſe réduit donc à ſavoir ſi les loix de l'équilibre & du mouvement qu'on obſerve dans la nature, ſont différentes de celles que la matiere abandonnée à elle-même auroit ſuivies; développons cette idée. Il eſt de la derniere évidence qu'en ſe bornant à ſuppoſer l'exiſtence de la matiere & du mouvement, il doit néceſſairement réſulter de cette double exiſtence certains effets; qu'un Corps mis en mouvement par quelque cauſe, doit ou s'arrêter au bout de quelque tems, ou continuer toujours à ſe mouvoir; qu'un corps qui tend à ſe mouvoir à la fois ſuivant les deux côtés d'un parallélogramme, doit néceſſairement décrire, ou la diagonale, ou quelqu'autre ligne; que quand

Digitized by Google

plusieurs Corps en mouvement se rencontrent & se choquent, il doit nécessairement arriver en conséquence de leur impénétrabilité mutuelle quelque changement dans l'état de tous ces Corps, ou au moins dans l'état de quelques-uns d'entr'eux. Or des différens effets possibles, soit dans le mouvement d'un Corps isolé, soit dans celui de plusieurs Corps qui agissent les uns sur les autres, il en est un qui dans chaque cas doit infailliblement avoir lieu en conséquence de l'existence seule de la matiere, & abstraction faite de tout autre principe différent, qui pourroit modifier cet effet ou l'altérer. Voici donc la route qu'un Philosophe doit suivre pour résoudre la question dont il s'agit. Il doit tâcher d'abord de découvrir par le raisonnement quelles seroient les loix de la Statique & de la Méchanique dans la matiere abandonnée à elle-même ; il doit examiner ensuite par l'expérience quelles sont ces loix dans l'univers ; si les unes & les autres sont différentes, il en conclura que les loix de la Statique & de la Méchanique, telle que l'expérience les donne, sont de vérité contingente, puisqu'elles seront la suite d'une volonté particuliere & expresse de l'être suprême ; si au contraire les loix données

Digitized by Google

par l'expérience s'accordent avec celles que le raiſonnement ſeul a fait trouver, il en conclura que les loix obſervées ſont de vérité néceſſaire ; non pas en ce ſens que le Créateur n'eût pû établir des loix toutes différentes, mais en ce ſens qu'il n'a pas jugé à propos d'en établir d'autres que celles qui réſultoient de l'éxiſtence même de la matiere.

Or nous croyons avoir démontré dans cet Ouvrage, qu'un Corps abandonné à lui-même doit perſiſter éternellement dans ſon état de repos ou de mouvement uniforme ; nous croyons avoir démontré de même que s'il tend à ſe mouvoir à la fois ſuivant les deux côtés d'un parallélogramme quelconque, la diagonale eſt la direction qu'il doit prendre de lui-même, & pour ainſi dire, choiſir entre toutes les autres. Nous avons démontré enfin que toutes les loix de la communication du mouvement entre les Corps ſe réduiſent aux loix de l'équilibre, & que les loix de l'équilibre ſe réduiſent elles-mêmes à celles de l'équilibre de deux Corps égaux, animés en ſens contraires de viteſſes virtuelles égales. Dans ce dernier cas les mouvemens des deux Corps ſe détruiront évidemment l'un l'autre, & par une conſéquence géométrique il y aura en-

Digitized by Google

core néceſſairement équilibre, lorſque les maſſes ſeront en raiſon inverſe des viteſſes; il ne reſte plus qu'à ſavoir ſi le cas de l'équilibre eſt unique, c'eſt-à-dire ſi quand les maſſes ne ſeront pas en raiſon inverſe des viteſſes, un des Corps devra néceſſairement obliger l'autre à ſe mouvoir. Or il eſt aiſé de ſentir que dès qu'il y a un cas poſſible & néceſſaire d'équilibre, il ne ſauroit y en avoir d'autres: ſans cela les loix du choc des Corps, qui ſe réduiſent néceſſairement à celles de l'équilibre, deviendroient indéterminées; ce qui ne ſauroit être, puiſqu'un Corps venant en choquer un autre, il doit neceſſairement en réſulter un effet unique, ſuite indiſpenſable de l'exiſtence & de l'impénétrabilité de ces Corps. On peut d'ailleurs démontrer l'unité de la loi d'équilibre par un autre raiſonnement, trop Mathématique pour être développé dans ce Diſcours, mais que j'ai tâché de rendre ſenſible dans mon Ouvrage, & auquel je renvoye le Lecteur (*).

De toutes ces réflexions, il s'enſuit que les loix de la Statique & de la Méchanique, expoſées dans ce Livre, ſont celles qui réſultent de l'exiſtence de la matiere & du mouvement. Or

(*) Voyez l'article 46 à la fin du troiſiéme cas, & l'article 47.

Digitized by Google

l'expérience nous prouve que ces loix s'obſervent en effet dans les Corps qui nous environnent. Donc les loix de l'équilibre & du mouvement, telles que l'obſervation nous les fait connoître, ſont de vérité néceſſaire. Un Métaphyſicien ſe contenteroit peut-être de le prouver, en diſant qu'il étoit de la ſageſſe du Créateur & de la ſimplicité de ſes vûes, de ne point établir d'autres loix de l'équilibre & du mouvement, que celles qui réſultent de l'exiſtence même des Corps, & de leur impénétrabilité mutuelle; mais nous avons cru devoir nous abſtenir de cette maniere de raiſonner, parce qu'il nous a paru qu'elle porteroit ſur un principe trop vague; la nature de l'être ſuprême nous eſt trop cachée pour que nous puiſſions connoître directement ce qui eſt ou n'eſt pas conforme aux vûes de ſa ſageſſe; nous pouvons ſeulement entrevoir les effets de cette ſageſſe dans l'obſervation des loix de la nature, lorſque le raiſonnement Mathématique nous aura fait voir la ſimplicité de ces loix, & que l'expérience nous en aura montré les applications & l'étendue.

Cette réflexion peut ſervir, ce me ſemble, à nous faire apprétier les démonſtrations, que pluſieurs Philoſophes ont données des loix du

mouvement d'après le principe des cauſes finales, c'eſt-à-dire d'après les vûes que l'Auteur de la nature a dû ſe propoſer en établiſſant ces loix. De pareilles démonſtrations ne peuvent avoir de force qu'autant qu'elles ſont précédées & appuyées par des démonſtrations directes & tirées de principes qui ſoient plus à notre portée ; autrement il arriveroit ſouvent qu'elles nous induiroient en erreur. C'eſt pour avoir ſuivi cette route, pour avoir cru qu'il étoit de la ſageſſe du Créateur de conſerver toujours la même quantité de mouvement dans l'univers, que Deſcartes s'eſt trompé ſur les loix de la percuſſion. Ceux qui l'imiteroient courroient riſque ou de ſe tromper comme lui, ou de donner pour un principe général ce qui n'auroit lieu que dans certains cas, ou enfin de regarder comme une loi primitive de la nature, ce qui ne ſeroit qu'une conſéquence purement Mathématique de quelques formules.

Après avoir donné au Lecteur une idée générale de l'objet que je me ſuis propoſé dans cet Ouvrage, il ne me reſte plus qu'un mot à dire ſur la forme que j'ai cru devoir lui donner. J'ai tâché dans ma premiere Partie de mettre, le plus qu'il m'a été poſſible, les Principes de la Mé-

Digitized by Google

chanique à la portée des commençans ; je n'ai pu me dispenser d'employer le calcul différentiel dans la théorie des mouvemens variés ; c'est la nature du sujet qui m'y a contraint. Au reste, j'ai fait ensorte de renfermer dans cette premiere Partie un assez grand nombre de choses dans un fort petit espace, & si je ne suis point entré dans tout le détail que la matiere pouvoit comporter, c'est qu'uniquement attentif à l'exposition & au développement des principes essentiels de la Méchanique, & ayant pour but de réduire cet Ouvrage à ce qu'il peut contenir de nouveau en ce genre, je n'ai pas cru devoir le grossir d'une infinité de propositions particulieres que l'on trouvera aisément ailleurs.

La seconde Partie, dans laquelle je me suis proposé de traiter des loix du mouvement des Corps entr'eux, fait la portion la plus considérable de l'Ouvrage : c'est la raison qui m'a engagé à donner à ce Livre le nom de *Traité de Dynamique*. Ce nom qui signifie proprement la Science des puissances ou causes motrices, pourroit paroître d'abord ne pas convenir à ce Livre, dans lequel j'envisage plutôt la Méchanique comme la Science des effets, que comme celle des causes : néanmoins comme le mot de

Digitized by Google

Dynamique eſt fort uſité aujourd'hui parmi les Savans, pour ſignifier la Science du mouvement des Corps, qui agiſſent les uns ſur les autres d'une maniere quelconque, j'ai cru devoir le conſerver, pour annoncer aux Géometres par le titre même de ce Traité, que je m'y propoſe principalement pour but de perfectionner & d'augmenter cette partie de la Méchanique. Comme elle n'eſt pas moins curieuſe qu'elle eſt difficile, & que les Problêmes qui s'y rapportent compoſent une claſſe très-étendue, les plus grands Géometres s'y ſont appliqués particuliérement depuis quelques années : mais ils n'ont réſolu juſqu'à préſent qu'un très-petit nombre de Problêmes de ce genre, & ſeulement dans des cas particuliers : la plûpart des ſolutions qu'ils nous ont données ſont appuyées outre cela ſur des principes que perſonne n'a encore démontrés d'une maniere générale ; tels, par exemple, que celui de la conſervation des forces vives. J'ai donc cru devoir m'étendre principalement ſur ce ſujet, & faire voir comment on peut réſoudre toutes les queſtions de Dynamique par une même Méthode fort ſimple & fort directe, & qui ne conſiſte que dans la combinaiſon dont j'ai parlé plus haut, des principes de l'équilibre

&

Digitized by Google

& du mouvement composé. J'en montre l'usage dans un petit nombre de Problêmes choisis, dont quelques-uns sont déja connus, d'autres sont entiérement nouveaux, d'autres enfin ont été mal résolus, même par les plus Savans Mathématiciens.

L'élégance dans la solution d'un Problême, consistant surtout à n'y employer que des principes directs & en très-petit nombre, on ne sera pas surpris que l'uniformité qui regne dans toutes mes solutions, & que j'ai eue principalement en vûe, les rende quelquefois un peu plus longues, que si je les avois déduites de principes moins directs. La démonstration que j'aurois été obligé de faire de ces principes, ne pouvoit d'ailleurs que m'écarter de la briéveté que j'aurois cherché à me procurer par leur moyen; & la portion la plus considérable de mon Livre, n'auroit plus été qu'un amas informe de Problêmes peu digne de voir le jour, malgré la variété que j'ai tâché d'y répandre, & les difficultés qui sont particulieres à chacun d'eux.

Au reste, comme cette seconde Partie est destinée principalement à ceux, qui déja instruits du calcul différentiel & intégral, se se-

Digitized by Google

ront rendus familiers les principes établis dans la premiere, ou ſeront déja exercés à la ſolution des Problêmes connus & ordinaires de la Méchanique; je dois avertir que pour éviter les circonlocutions, je me ſuis ſouvent ſervi du terme obſcur de *force*, & de quelques autres qu'on employe communément quand on traite du mouvement des Corps; mais je n'ai jamais prétendu attacher à ces termes d'autres idées que celles qui réſultent des principes que j'ai établis, ſoit dans ce Diſcours, ſoit dans la premiere Partie de ce Traité.

Enfin, du même principe qui me conduit à la ſolution de tous les Problêmes de Dynamique, je déduis auſſi pluſieurs propriétés du centre de gravité, dont les unes ſont entiérement nouvelles, les autres n'ont été prouvées juſqu'à préſent que d'une maniere vague & obſcure, & je termine l'Ouvrage par une démonſtration du principe appellé communément *la conſervation des forces vives.*

L'accueil que le Public a fait à ce premier eſſai, lorſqu'il parût en 1743, m'a engagé à publier en 1744 un autre Ouvrage, dans lequel ce qui concerne le mouvement & l'équilibre des fluides a été traité ſuivant la même

Digitized by Google

Méthode, & par le même principe. Cette matiere épineuſe & délicate n'eſt pas la ſeule à laquelle j'aie appliqué ce principe; j'en ai fait le plus grand uſage dans mes *Recherches ſur la préceſſion des Equinoxes*, Problême dont j'ai donné le premier la ſolution, long-tems & inutilement cherchée par de très-grands Géometres; dans mon *Eſſai ſur la réſiſtance des fluides*, fondé ſur une théorie entiérement nouvelle; dans mes *Réflexions ſur la cauſe des vents*, pour calculer les oſcillations que l'action du Soleil & de la Lune doivent produire dans notre Atmoſphère, & que perſonne n'avoit encore entrepris de déterminer; enfin j'oſe dire que plus j'ai eu d'occaſions d'employer les Méthodes expoſées & developpées dans cet Ouvrage, plus j'ai reconnu la ſimplicité, la généralité & la fécondité de ces Méthodes.

Digitized by Google

TABLE
DES TITRES

Contenus en cet Ouvrage.

AVERTISSEMENT.
DISCOURS PRÉLIMINAIRE. page j
Définitions & Notions préliminaires. page 1

PREMIERE PARTIE.

Loix générales du Mouvement & de l'équilibre des Corps.

CHAPITRE I. *DE la force d'inertie, & des propriétés du Mouvement qui en réſultent.* page 3
Du Mouvement uniforme. p. 9
REMARQUE ſur la meſure du tems. p. 11
Du Mouvement accéléré ou retardé. p. 16

Digitized by Google

Remarques sur les forces accélératrices, & sur la comparaison de ces forces entr'elles. p. 22
Chap. II. *Du Mouvement composé.* p. 35
Du Mouvement en ligne courbe, & des forces centrales. p. 40
Chap. III. *Du Mouvement détruit ou changé par des obstacles.* p. 44
Du Mouvement d'un Corps le long d'une surface courbe. p. 47
De l'Equilibre. p. 50

SECONDE PARTIE.

Principe général pour trouver le Mouvement de plusieurs Corps qui agissent les uns sur les autres d'une maniere quelconque, avec plusieurs applications de ce Principe.

Chapitre I. *Exposition du Principe.* page 72
Chap. II. *Propriétés du centre de gravité commun de plusieurs Corps, déduites du Principe précédent.* p. 75
Chap. III. *Problémes où l'on montre l'usage du Principe précédent.* p. 96
§. I. *Des Corps qui se tiennent par des fils ou par des verges.* ibid.

Digitized by Google

§. II. *Des Corps qui vacillent sur des plans.* p. 186
§. III. *Des Corps qui agissent les uns sur les autres par des fils, le long desquels ils peuvent couler librement.* p. 200
§. IV. *Des Corps qui se poussent ou qui se choquent.* p. 211
D'un Corps qui en choque plusieurs autres à la fois. p. 227
Du choc des Corps à ressort qui se rencontrent plusieurs à la fois. p. 235
CHAP. IV. *Du Principe de la conservation des forces vives.* p. 252
De la conservation des forces vives dans les Corps qui se tiennent par des fils ou par des verges inflexibles. p. 254
De la conservation des forces vives quand les Corps, regardés comme des points, se tiennent par des fils. p. 259
De la conservation des forces vives quand les Corps se tiennent par des verges infléxibles, & qu'on les regarde comme des points. p. 261
De la conservation des forces vives quand les Corps sont de masses finies, & qu'ils se tiennent par des fils ou par des verges infléxibles. p. 262
De la conservation des forces vives dans le choc des Corps élastiques. p. 264
De la conservation des forces vives dans les fluides. p. 269

Fin de la Table des Titres.

Digitized by Google

PRIVILEGE DU ROI.

LOUIS, par la grace de Dieu, Roi de France & de Navarre, à nos amés & féaux Conſeillers, les Gens tenans nos Cours de Parlement, Maîtres des Requêtes ordinaires de notre Hôtel, Grand-Conſeil, Prevôt de Paris, Baillifs, Sénéchaux, leurs Lieutenans Civils, & autres nos Juſticiers qu'il appartiendra, SALUT. Nos bien-amés LES MEMBRES DE L'ACADÉMIE ROYALE DES SCIENCES de notre bonne Ville de Paris, nous ont fait expoſer qu'ils auroient beſoin de nos Lettres de Privilége pour l'impreſſion de leurs Ouvrages : A CES CAUSES, voulant favorablement traiter les Expoſans, nous leur avons permis & permettons par ces Préſentes, de faire imprimer, par tel Imprimeur qu'ils voudront choiſir, toutes les Recherches ou Obſervations journalieres, ou Relations annuelles de tout ce qui aura été fait dans les Aſſemblées de ladite Académie Royale des Sciences, les Ouvrages, Mémoires ou Traités de chacun des Particuliers qui la compoſent, & généralement tout ce que ladite Académie voudra faire paroître, après avoir fait examiner leſdits Ouvrages, & jugé qu'ils ſont dignes de l'impreſſion, en tels volumes, forme, marge, caracteres, conjointement ou ſéparément, & autant de fois que bon leur ſemblera, & de les faire vendre & débiter par tout notre Royaume, pendant le tems de vingt années conſécutives, à compter du jour de la date des Préſentes; ſans toutefois qu'à l'occaſion des Ouvrages ci-deſſus ſpécifiés, il puiſſe en être imprimé d'autres qui ne ſoient pas de ladite Académie : faiſons défenſes à toutes ſortes de perſonnes, de quelque qualité & condition qu'elles ſoient, d'en introduire d'impreſſion étrangere dans aucun lieu de notre obéiſſance; comme auſſi à tous Libraires & Imprimeurs d'imprimer ou faire imprimer, vendre, faire vendre & débiter leſdits Ouvrages, en tout ou en partie, & d'en faire aucunes traductions ou extraits, ſous quelque prétexte que ce puiſſe être, ſans la permiſſion expreſſe & par écrit deſdits Expoſans, ou de ceux qui auront droit d'eux, à peine de confiſcation des Exemplaires contrefaits, de trois mille livres d'amende contre chacun des contrevenans; dont un tiers à Nous, un tiers à l'Hôtel-Dieu de Paris, & l'autre tiers auſdits Expoſans, ou à celui qui aura droit d'eux, & de tous dépens, dommages & intérêts; à la charge que ces Préſentes ſeront enregiſtrées tout au long ſur le Regiſtre de la Communauté des Libraires & Imprimeurs de Paris, dans trois mois de la date d'icelles; que l'impreſſion deſdits Ouvrages ſera faite dans notre Royaume, & non ailleurs, en bon papier & beaux caracteres, conformément aux Réglemens de la Librairie; qu'avant de les expoſer en vente, les Manuſcrits ou Imprimés qui auront ſervi de copie à l'impreſſion deſdits Ouvrages, ſeront remis ès mains de notre très-cher & féal Chevalier le Sieur DAGUESSEAU, Chancelier de France, Commandeur de nos Ordres, & qu'il en ſera enſuite remis deux Exemplaires dans notre Bibliothéque publique, un en celle de notre

Digitized by Google

Château du Louvre, & un en celle de notredit très-cher & féal Chevalier le Sieur DAGUESSEAU, Chancelier de France; le tout à peine de nullité desdites Présentes: du contenu desquelles vous mandons & enjoignons de faire jouir lesdits Exposans & leurs ayans cause, pleinement & paisiblement, sans souffrir qu'il leur soit fait aucun trouble ou empêchement. Voulons que la copie des Présentes, qui sera imprimée tout au long au commencement ou à la fin desdits Ouvrages, soit tenue pour dûëment signifiée, & qu'aux copies collationnées par l'un de nos amés féaux Conseillers & Sécrétaires, foi soit ajoûtée comme à l'original. Commandons au premier notre Huissier ou Sergent sur ce requis, de faire pour l'exécution d'icelles, tous actes requis & nécessaires, sans demander autre permission, & nonobstant Clameur de Haro, Charte Normande & Lettres à ce contraires; CAR tel est notre plaisir. DONNÉ à Paris le dix-neuviéme jour du mois de Mars, l'an de grace mil sept cens cinquante, & de notre Régne le trente-cinquiéme. Par le Roi en son Conseil. MOL.

Registré sur le Registre XII. de la Chambre Royale & Syndicale des Libraires & Imprimeurs de Paris, N°. 430. fol. 309. conformément au Réglement de 1723, qui fait défenses, article IV. à toutes personnes, de quelque qualité qu'elles soient, autres que les Libraires & Imprimeurs, de vendre, débiter & faire afficher aucuns Livres pour vendre, soit qu'ils s'en disent les Auteurs ou autrement; à la charge de fournir à la susdite Chambre huit Exemplaires de chacun, prescrits par l'art. CVIII. du même Réglement. A Paris le 5 Juin 1750.

Signé, LE GRAS, *Syndic.*

TRAITÉ

Digitized by Google

TRAITÉ DE DYNAMIQUE.

Définitions & Notions préliminaires.

I.

SI deux portions d'étendue ſemblables & égales entr'elles ſont *impénétrables*, c'eſt-à-dire, ſi elles ne peuvent être imaginées unies & confondues l'une avec l'autre, de manière qu'elles ne faſſent qu'une même portion d'étendue moindre que la ſomme des deux, chacune de ces portions d'étendue ſera ce qu'on appelle un *Corps*. L'impénétrabilité eſt la propriété principale par laquelle nous diſtinguons les Corps des parties de l'eſpace indéfini, où nous imaginons qu'ils ſont placés.

Digitized by Google

Le *lieu* d'un Corps eſt la partie de l'eſpace qu'il occupe, c'eſt-à-dire la partie de l'eſpace avec laquelle l'étendue du Corps eſt coincidente.

II.

Un Corps eſt en repos quand il reſte dans un même lieu; il eſt en mouvement quand il paſſe d'un lieu dans un autre, c'eſt-à-dire quand il occupe ſucceſſivement & ſans interruption des parties de l'eſpace immédiatement contigues les unes aux autres.

III.

Comme un Corps ne peut occuper pluſieurs lieux à la fois, il ne peut arriver d'un lieu à un autre dans le même inſtant: le mouvement ne peut donc ſe faire que durant un certain *tems*.

IV.

L'eſpace parcouru par un Corps qui ſe meut eſt diviſible à l'infini; le tems eſt donc auſſi diviſible à l'infini. On conçoit de plus, que ſi un Corps ſe meut en ligne droite, ſans ſubir à chaque inſtant d'autre changement que le changement de place, il ne peut manquer de parcourir des eſpaces égaux en tems égaux. Dans ce cas, on dit que le Corps ſe meut *uniformément*. Si les eſpaces parcourus en tems égaux ſont croiſſans ou décroiſſans, le mouvement eſt dit *accéléré* ou *retardé*.

Digitized by Google

PREMIERE PARTIE.

Loix générales du mouvement & de l'équilibre des Corps.

1. ON peut réduire tous les Principes de la Mécanique à trois, la force d'inertie, le mouvement composé, & l'équilibre. Au moins j'eſpere faire voir par ce Traité, que toute cette ſcience peut être déduite de ces trois Principes. Je traiterai de chacun en particulier dans chacun des Chapitres ſuivans.

CHAPITRE PREMIER.

De la force d'inertie, & des propriétés du mouvement qui en réſultent.

2. J'APPELLE avec M. Newton *force d'inertie*, la propriété qu'ont les Corps de reſter dans l'état où ils ſont: c'eſt cette propriété qu'il faut démontrer ici. Or un Corps eſt néceſſairement dans l'état de repos ou dans celui de mouvement; il faut donc démontrer les deux Loix ſuivantes.

I. LOI.

3. Un Corps en repos y perſiſtera, à moins qu'u..e

Digitized by Google

cauſe étrangere ne l'en tire. Car un Corps ne peut ſe déterminer de lui-même au mouvement, puiſqu'il n'y a pas de raiſon pour qu'il ſe meuve d'un côté plutôt que d'un autre.

COROLLAIRE.

4. Delà il s'enſuit, que ſi un Corps reçoit du mouvement par quelque cauſe que ce puiſſe être, il ne pourra de lui-même accélérer ni retarder ce mouvement.

5. On appelle en général *puiſſance* ou *cauſe motrice*, tout ce qui oblige un Corps à ſe mouvoir.

II. LOI.

6. Un Corps mis une fois en mouvement par une cauſe quelconque, doit y perſiſter toujours uniformément & en ligne droite, tant qu'une nouvelle cauſe, différente de celle qui l'a mis en mouvement, n'agira pas ſur lui; c'eſt-à-dire, qu'à moins qu'une cauſe étrangere & différente de la cauſe motrice, n'agiſſe ſur ce Corps, il ſe mouvra perpétuellement en ligne droite, & parcourra en tems égaux des eſpaces égaux.

Car, ou l'action Indiviſible & inſtantanée de la cauſe motrice au commencement du Mouvement, ſuffit pour faire parcourir au Corps un certain eſpace, ou le Corps a beſoin pour ſe mouvoir de l'action continuée de la cauſe motrice.

Dans le premier cas, il eſt viſible que l'eſpace parcouru ne peut être qu'une ligne droite décrite uniformément.

Digitized by Google

par le Corps mû. Car (*hyp.*) paſſé le premier inſtant, l'action de la cauſe motrice n'exiſte plus, & le Mouvement néanmoins ſubſiſte encore : il ſera donc néceſſairement uniforme, puiſque (*Art.* 4) un Corps ne peut accélérer ni retarder ſon Mouvement de lui-même. De plus, il n'y a pas de raiſon pour que le Corps s'écarte à droite plutôt qu'à gauche. Donc dans ce premier cas, où l'on ſuppoſe qu'il ſoit capable de ſe mouvoir de lui-même pendant un certain tems, indépendamment de la cauſe motrice, il ſe mouvra de lui-même pendant ce tems uniformément & en ligne droite.

Or un Corps qui peut ſe mouvoir de lui-même uniformément & en ligne droite pendant un certain tems, doit continuer perpétuellement à ſe mouvoir de la même manière, ſi rien ne l'en empêche. Car ſuppoſons le Corps partant de A, (Fig. 1re) & capable de parcourir de lui-même uniformément la ligne AB; ſoient pris ſur la ligne AB deux points quelconques C, D, entre A & B. Le Corps étant en D eſt préciſément dans le même état que lorſqu'il eſt en C, ſi ce n'eſt qu'il ſe trouve dans un autre lieu. Donc il doit arriver à ce Corps la même choſe que quand il eſt en C. Or étant en C il peut (*hyp.*) ſe mouvoir de lui-même uniformément juſqu'en B. Donc étant en D il pourra ſe mouvoir de lui-même uniformément juſqu'au point G, tel que $DG = CB$, & ainſi de ſuite.

Donc ſi l'action premiere & inſtantanée de la cauſe motrice eſt capable de mouvoir le Corps, il ſera mû

uniformément & en ligne droite, tant qu'une nouvelle cauſe ne l'en empêchera pas.

Dans le ſecond cas, puiſqu'on ſuppoſe qu'aucune cauſe étrangere & différente de la cauſe motrice n'agit ſur le Corps, rien ne détermine donc la cauſe motrice à augmenter ni à diminuer; d'où il s'enſuit que ſon action continuée ſera uniforme & conſtante, & qu'ainſi pendant le tems qu'elle agira, le Corps ſe mouvra en ligne droite & uniformément. Or la même raiſon qui a fait agir la cauſe motrice conſtamment & uniformément pendant un certain tems, ſubſiſtant toujours tant que rien ne s'oppoſe à ſon action, il eſt clair que cette action doit demeurer continuellement la même, & produire conſtamment le même effet. Donc &c.

Donc en général un Corps mis en mouvement par quelque cauſe que ce ſoit, y perſiſtera toujours uniformément & en ligne droite, tant qu'aucune cauſe nouvelle n'agira pas ſur lui.

La ligne droite qu'un Corps décrit ou tend à décrire, eſt nommée *ſa direction*.

Remarque Premiere.

7. Je me ſuis un peu étendu ſur la preuve de la ſeconde Loi, parce qu'il y a eu & qu'il y a peut-être encore quelques Philoſophes qui prétendent que le mouvement d'un Corps doit de lui-même ſe ralentir peu à peu, comme il ſemble que l'Expérience le prouve. Il faut convenir au reſte que toutes les preuves qu'on a données

Digitized by Google

juſqu'ici de la conſervation du mouvement, n'ont point le degré d'évidence néceſſaire pour convaincre l'eſprit; elles ſont preſque toutes fondées, ou ſur une force qu'on imagine dans la matiere, par laquelle elle réſiſte à tout changement d'état, ou ſur l'indifférence de la matiere au mouvement comme au repos. Le premier de ces deux Principes, outre qu'il ſuppoſe dans la matiere un Etre dont on n'a point d'idée nette, ne peut ſuffire pour prouver la Loi dont il eſt queſtion. Car quand un Corps ſe meut, même uniformément, le mouvement qu'il a dans un inſtant quelconque, eſt diſtingué & comme iſolé du mouvement qu'il a eu ou qu'il aura dans les inſtans précédens ou ſuivans. Le Corps eſt donc en quelque maniere à chaque inſtant dans un nouvel état, dans un état qui n'a rien de commun avec le précédent; il ne fait, pour ainſi dire, continuellement que commencer à ſe mouvoir, & on pourroit croire qu'il tendroit ſans ceſſe à retomber dans le repos, ſi la même cauſe qui l'en a tiré d'abord, ne continuoit en quelque ſorte à l'en tirer toujours.

A l'égard de l'indifférence de la matiere au Mouvement ou au repos, tout ce que ce Principe préſente, ce me ſemble, de bien diſtinct à l'eſprit, c'eſt qu'il n'eſt pas eſſentiel à la matiere de ſe mouvoir toujours, ni d'être toujours en repos; mais s'enſuit-il clairement de là qu'un Corps en Mouvement ne puiſſe tendre continuellement au repos? Ce n'eſt pas que le repos lui ſoit plus eſſentiel que le Mouvement; mais on pourroit penſer

qu'il ne faut autre chose à un Corps pour être en repos, que d'être un Corps, au lieu que pour le Mouvement il a peut-être besoin de quelque chose de plus, qui doit être, pour ainsi dire, continuellement reproduit en lui ; à peu près comme nous l'éprouvons dans le mouvement de notre corps, qui pour se mouvoir a besoin d'un effort continuel, lequel se consume & renaît à chaque instant. Nous ne prétendons pas donner pour juste le parallele des corps animés aux corps inanimés ; mais ce parallele peut au moins faire croire confusément, quoique sans raison, qu'il y a quelque chose dans un corps en mouvement qui n'est pas dans un corps en repos, & suffit par conséquent pour rendre insuffisante la preuve que nous examinons ici.

La démonstration donnée ci-dessus de la conservation du Mouvement, a cela de particulier, qu'elle a lieu également, soit que la cause motrice doive toujours être appliquée au Corps, ou non. Ce n'est pas que je croye l'action continuée de cette cause, nécessaire pour mouvoir le Corps ; car si l'action instantanée ne suffisoit pas, quel seroit alors l'effet de cette action ? Et si l'action instantanée n'avoit point d'effet, comment l'action continuée en auroit-elle ? Mais comme on doit employer à la solution d'une question le moins de Principes qu'il est possible, j'ai cru devoir me borner à démontrer que la continuation du Mouvement a lieu également dans les deux hypotheses ; il est vrai que notre démonstration suppose l'existence du Mouvement, & à plus forte raison sa possibilité ;

Digitized by Google

ſibilité; mais nier que le Mouvement exiſte, c'eſt ſe refuſer à un fait que perſonne ne révoque en doute.

Remarque Seconde.

8. L'expérience eſt d'accord avec le raiſonnement pour prouver le principe de la *force d'inertie :* 1°. Nous voyons *que les corps qui nous environnent reſtent en repos, tant que rien ne les en tire ;* & s'il arrive quelquefois qu'ils paroiſſent ſe mouvoir ſans que nous en voyons la cauſe, nous avons lieu de juger par l'analogie, par l'uniformité des loix de la nature, & par l'incapacité de la matiere à ſe mouvoir d'elle-même, que cette cauſe n'en eſt pas moins réelle pour nous être cachée. 2°. Quoiqu'il n'y ait point de corps qui conſerve éternellement ſon mouvement, puiſqu'il y a toujours des cauſes qui le ralentiſſent peu-à-peu, comme le frottement & la réſiſtance de l'air, cependant nous voyons qu'un corps en mouvement y perſiſte d'autant plus long-tems que les cauſes qui retardent ce mouvement ſont moindres; d'où nous pouvons conclure que le *mouvement ne finiroit point, ſi les cauſes retardatrices étoient nulles* (*).

Du Mouvemement uniforme.

9. Nous venons de voir qu'un Corps ſe meut unifor-

(*) On trouvera dans l'Encyclopédie au mot Force pluſieurs autres réflexions ſur le principe de la force d'inertie; comme elles n'appartiennent pas immédiatement à notre ſujet, nous y renvoyons le Lecteur.

Digitized by Google

mément & en ligne droite, quand aucune cauſe étrangere n'agit ſur lui. D'où il s'enſuit que le même Corps peut encore ſe mouvoir uniformément, lorſque deux cauſes étrangeres agiſſent en même-tems & également, l'une pour accélérer, l'autre pour retarder ſon Mouvement. (C'eſt ainſi, pour le dire en paſſant, que les Corps qui tombent parviennent à ſe mouvoir uniformément, lorſque la réſiſtance du Fluide où ils ſe meuvent tend à diminuer leur mouvement, autant que leur peſanteur tend à l'augmenter). Dans tout autre cas, le Mouvement eſt néceſſairement accéléré ou retardé.

10. Si deux parties quelconques AB, AC (Fig. 2) d'une ligne indéfinie AO repréſentent deux portions du tems écoulé depuis le commencement du Mouvement, & les lignes BD, CE, les eſpaces parcourus durant ces tems par un Corps dont le Mouvement eſt uniforme, les points D, E, ſeront à une ligne droite ADE.

Car, puiſqu'un Corps qui ſe meut uniformément parcourt des eſpaces égaux en tems égaux, les points D, E, doivent être à une ligne telle, que ſi on prend AB, BC égales entr'elles & quelconques, on ait toujours $BD = FE$. Or cette propriété n'appartient qu'à la ligne droite. Donc &c.

COROLLAIRE.

11. $BD : CE :: AB : AC$. C'eſt-à-dire que dans le Mouvement uniforme, les eſpaces ſont entr'eux comme les tems employés à les parcourir.

Digitized by Google

Remarque sur la mesure du tems.

12. Comme le rapport des parties du tems nous est inconnu en lui-même, l'unique moyen que nous puissions employer pour découvrir ce rapport, c'est d'en chercher quelqu'autre plus sensible & mieux connu, auquel nous puissions le comparer; on aura donc trouvé la mesure du tems la plus simple, si on vient à bout de comparer de la maniere la plus simple qu'il soit possible, le rapport des parties du tems, avec celui de tous les rapports que l'on connoît le mieux. Delà il résulte que le Mouvement uniforme est la mesure du tems la plus simple. Car d'un côté, le rapport des parties d'une ligne droite est celui que nous saisissons le plus facilement; & de l'autre, il n'y a point de rapports plus aisés à comparer entr'eux, que des rapports égaux. Or dans le Mouvement uniforme, le rapport des parties du tems est égal à celui des parties correspondantes de la ligne parcourue. Le Mouvement uniforme nous donne donc tout à la fois le moyen, & de comparer le rapport des parties du tems au rapport qui nous est le plus sensible, & de faire cette comparaison de la maniere la plus simple; nous trouvons donc dans le Mouvement uniforme, la mesure la plus simple du tems.

Je dis outre cela, que la mesure du tems par le Mouvement uniforme, est, indépendamment de sa simplicité, celle dont il est le plus naturel de penser à se servir. En effet, comme il n'y a point de rapport que nous con-

Digitized by Google

noiſſions plus exactement que celui des parties de l'eſpace, & qu'en général un Mouvement quelconque dont la loi ſeroit donnée, nous conduiroit à découvrir le rapport des parties du tems, par l'analogie connue de ce rapport avec celui des parties de l'eſpace parcouru; il eſt clair qu'un tel Mouvement ſeroit la meſure du tems la plus exacte, & par conſéquent celle qu'on devroit mettre en uſage préférablement à toute autre. Donc, s'il y a quelque eſpece particuliere du Mouvement, où l'analogie entre le rapport des parties du tems & celui des parties de l'eſpace parcouru, ſoit connue indépendamment de toute hypotheſe, & par la nature du Mouvement même, & que cette eſpece particuliere de Mouvement ſoit la ſeule à qui cette propriété appartienne, elle ſera néceſſairement la meſure du tems la plus naturelle. Or il n'y a que le Mouvement uniforme qui réuniſſe les deux conditions dont nous venons de parler. Car (*art. 6*) le Mouvement d'un Corps eſt uniforme par lui-même: il ne devient accéléré ou retardé qu'en vertu d'une cauſe étrangere, & alors il eſt ſuſceptible d'une infinité de loix différentes de variation. La loi d'uniformité, c'eſt à-dire l'égalité entre le rapport des tems & celui des eſpaces parcourus, eſt donc une propriété du Mouvement conſidéré en lui-même. Le Mouvement uniforme n'en eſt par-là que plus analogue à la durée, & par conſéquent plus propre à en être la meſure, puiſque les parties de la durée ſe ſuccedent auſſi conſtamment & uniformément. Au contraire, toute loi d'accélération ou de diminution

Digitized by Google

dans le Mouvement, eſt arbitraire, pour ainſi dire, & dépendante de circonſtances extérieures. Le Mouvement non uniforme ne peut être par conſéquent la meſure naturelle du tems; car en premier lieu, il n'y auroit pas de raiſon pourquoi une eſpece particuliere de Mouvement non uniforme, fût la meſure premiere du tems plutôt qu'une autre : en ſecond lieu, on ne pourroit meſurer le tems par un Mouvement non uniforme, ſans avoir découvert auparavant par quelque moyen particulier l'analogie entre le rapport des tems & celui des eſpaces parcourus, qui conviendroit au Mouvement propoſé. D'ailleurs, comment connoître cette analogie autrement que par l'expérience, & l'expérience ne ſuppoſeroit-elle pas qu'on eût déja une meſure du tems fixe & certaine ?

Mais le moyen de s'aſſurer, dira-t'on, qu'un Mouvement ſoit parfaitement uniforme ? Je réponds d'abord, qu'il n'y a non plus aucun Mouvement non uniforme dont nous ſachions exactement la Loi, & qu'ainſi cette difficulté prouve ſeulement que nous ne pouvons connoître exactement & en toute rigueur le rapport des parties du tems; mais il s'enſuit pas delà, que le Mouvement uniforme n'en ſoit par ſa nature ſeule, la premiere & la plus ſimple meſure. Auſſi ne pouvant avoir de meſure du tems préciſe & rigoureuſe, c'eſt dans les Mouvemens à peu près uniformes que nous en cherchons la meſure au moins approchée. Nous avons trois moyens de juger qu'un Mouvement eſt à peu près uniforme : 1°. Quand le corps

Digitized by Google

qui ſe meut parcourt des eſpaces égaux, dans des tems que nous avons lieu de juger égaux; & nous avons lieu de juger les tems égaux, quand nous avons obſervé par une expérience réitérée, qu'il ſe paſſe durant ces tems des effets ſemblables, que nous avons lieu de juger devoir durer également long-tems. Ainſi nous avons lieu de juger que les tems qu'une même clepſydre met à ſe vuider ſont égaux; ſi donc pendant ces tems un corps parcourt des eſpaces égaux, nous avons lieu de juger que ſon mouvement eſt uniforme. 2°. Quand nous avons lieu de croire que l'effet de la cauſe accélératrice ou retardatrice, s'il y en a une, ne peut être qu'inſenſible. C'eſt par la réunion de ces deux moyens qu'on a jugé que le mouvement de la terre autour de ſon axe eſt uniforme, & cette ſuppoſition non-ſeulement n'eſt point contredite par les autres phénomenes céleſtes, mais elle paroît même s'y accorder parfaitement. 3°. Quand nous comparons le Mouvement dont il s'agit à d'autres Mouvemens, & que nous obſervons la même Loi dans les uns & les autres. Ainſi, ſi pluſieurs Corps ſe meuvent, de maniere que les eſpaces qu'ils parcourent durant un même tems ſoient toujours entr'eux, ou exactement, ou à peu près dans le même rapport, on juge que le Mouvement de ces Corps eſt ou exactement, ou au moins à très-peu près uniforme. Car ſi un corps *A* qui ſe meut uniformément parcourt l'eſpace *E* durant le tems *T* pris à volonté, & qu'un autre corps *B*, ſe mouvant auſſi uniformément, parcoure l'eſpace *e* pendant le même tems

Digitized by Google

T, le rapport des eſpaces E, e, ſera toujours le même ſoit que les deux corps ayent commencé à ſe mouvoir dans le même inſtant ou dans des inſtans différens; & le mouvement uniforme eſt le ſeul qui ait cette propriété. C'eſt pourquoi ſi on diviſe le tems en parties quelconques égales ou inégales à volonté, & ſi on trouve que les eſpaces parcourus par deux corps durant une même partie de ce tems, ſont toujours dans le même rapport, plus le nombre des parties du tems ſera grand, plus on ſera en droit de conclure que le mouvement de chaque corps eſt uniforme.

Aucun de ces trois moyens n'eſt exact dans la rigueur géométrique; mais ils ſuffiſent, ſurtout quand ils ſont répétés & réunis, pour tirer une concluſion valable, ſinon ſur l'uniformité abſolue, au moins ſur l'uniformité très-approchée.

13. Un Corps qui ſe meut uniformément eſt dit ſe mouvoir d'autant plus *vîte*, que l'eſpace BD qu'il parcourt dans un même tems AB, eſt plus grand; de ſorte que ſi BD, Bd ſont les eſpaces parcourus uniformément par deux Corps dans le même tems AB, on dit que les *viteſſes* de ces deux Corps ſont entr'elles comme BD à Bd.

COROLLAIRE.

14. BD eſt à $Bd :: \frac{BD}{AB} : \frac{Bd}{AB} :: \frac{BD}{AB} : \frac{Ce}{AC}$.

donc en général les viteſſes de deux Corps ſont entr'elles

comme les eſpaces *B D*, *C e* qu'ils parcourent dans des tems quelconques, ces eſpaces étant diviſés par les tems employés à les parcourir (1).

La viteſſe d'un Corps mû uniformément, eſt donc en général comme l'eſpace diviſé par le tems. La *viteſſe* ne renfermant qu'une idée relative, n'a point de meſure abſolue, on ne juge point de la viteſſe d'un Corps en elle-même, mais en la comparant à la viteſſe d'un autre Corps. Ainſi cette maniere de parler ſi commune chez les Mécaniciens, que la *viteſſe eſt égale à l'eſpace diviſé par le tems*, n'eſt qu'une expreſſion abrégée pour dire que les viteſſes de deux Corps qui ſe meuvent uniformément, ſont entr'elles comme les eſpaces que ces Corps parcourent, diviſés par les tems qu'ils employent à les parcourir; expreſſion qu'il faut entendre elle-même dans le ſens expliqué par la note.

Du Mouvement accéléré ou retardé.

15. Si les lignes *B D*, *C E*, (Fig. 3 & 4.) repréſen-

(1) L'eſpace & le tems étant des quantités de nature différente, ainſi qu'on l'a remarqué dans le Diſcours préliminaire, on ſent bien qu'on ne peut diviſer l'eſpace par le tems; ainſi quand on dit que *les viteſſes ſont comme les eſpaces diviſés par les tems*, c'eſt une expreſſion abrégée qui ſignifie que les viteſſes ſont comme les rapports des eſpaces à une même commune meſure, diviſés par les rapports des tems à une même commune meſure; c'eſt-à-dire que ſi on prend, par exemple, le pied pour la meſure des eſpaces, & la minute pour la meſure des tems, les viteſſes de deux corps qui ſe meuvent uniformément ſont entr'elles comme les nombres de pieds parcourus diviſés par les nombres de minutes employées à les parcourir, & non pas comme les pieds diviſés par les minutes. *Voyez* l'Encyclopédie à la fin du mot EQUATION.

tant

Digitized by Google

tant les espaces parcourus pendant les tems AB, AC, ne sont pas à une ligne droite, mais à une courbe ADE, alors le Mouvement n'est plus uniforme, mais il est accéléré ou retardé, selon que la courbe ADE est convexe ou concave vers AC; car si le mouvement est accéléré, par exemple, les espaces DX, PE (Pl. V. fig. 1.) parcourus dans des tems égaux BQ, BC, sont croissans; ensorte que PE est $> DX$; ce qui ne sauroit être à moins que la courbe ADE ne soit convexe vers AC. Cette variation continuelle ne peut provenir (*art.* 6.) que de quelque cause étrangere qui agit sans cesse, pour accélérer ou retarder le Mouvement.

La viteſſe du Corps mû change alors à chaque inſtant, & ne peut avoir, comme dans le Mouvement uniforme, une quantité conſtante pour meſure. On conçoit ſeulement que ſon expreſſion pour un inſtant donné, doit être la même qu'elle ſeroit, ſi dans cet inſtant le Mouvement ceſſoit d'être accéléré ou retardé. Suppoſons donc, par exemple, que le Mouvement du corps ſoit accéléré; & qu'à l'inſtant même où le corps finit de parcourir la ligne BD, il vienne à ſe mouvoir uniformément avec la viteſſe qu'il a en D; il eſt clair, 1°. que les lignes TZ, PN (Pl. V. fig. 1.) repréſentant les eſpaces qu'il décriroit alors dans des tems finis quelconques BM, BC, ſeroient terminés par une ligne droite DN; 2°. que ces lignes PN, TZ, doivent être plus grandes que les eſpaces DX, Dx, qu'il a parcourus précédemment dans des tems $Bm = BM$, & $BQ = BC$; 3°. que

Digitized by Google

ces mêmes eſpaces PN, TZ doivent être plus petits que les eſpaces PE, TG, qu'il auroit parcourus dans les tems BC, BM, ſi ſon mouvement avoit continué à être accéléré. Or pour cela il faut que DN ſoit tangente (2). On démontrera la même choſe dans le cas du mouvement retardé; d'où il s'enſuit, en général, en tirant la tangente DN, que PN ſeroit l'eſpace que le corps parcourroit dans le tems BC au lieu de PE. Dans ce cas (*art.* 14) $\frac{PN}{DP}$ exprimeroit ſa viteſſe; or le rapport de PN à DP, eſt le même que celui de l'Elément de BD à l'Elément de AB, parce que DN eſt tangente. Donc ſi on nomme en général t le tems, e l'eſpace correſpondant parcouru par le corps, u la viteſſe à la fin du tems t, on aura $u = \frac{de}{dt}$.

Si on prolonge la tangente DN (Pl. I. fig. 3. & 4.) juſqu'à ce qu'elle rencontre AB en F; BF exprimera le tems que le corps employeroit à parcourir uniformément BD avec la viteſſe qu'il a au point D. Donc ſi par le point A on tire Ad parallèle à FD; Bd ſera l'eſpace

(2) Il eſt viſible qu'on ne peut ſuppoſer que le corps décrive par ſon mouvement uniforme un eſpace PO plus petit que l'eſpace PN terminé par la tangente DN; car PO ſeroit alors plus petit que DX, puiſque $PO = Dy$. On ne peut ſuppoſer non plus qu'il décrive un eſpace PR plus grand que PN, car alors on pourroit toujours ſuppoſer le point T tellement placé, que l'eſpace TG parcouru uniformément pendant le tems DT fût plus grand que l'eſpace TG terminé à la courbe, ce qui ne ſe peut.

Digitized by Google

que ce même corps parcourroit uniformément avec cette même viteſſe dans le tems AB.

On voit par-là (Fig. 3) que ſi $AD'E$, par exemple, eſt une parabole, c'eſt-à-dire, ſi les eſpaces BD, CE ſont entr'eux comme les quarrés des tems, on aura $AB = 2BF$; & $Bd = 2BD$.

Corollaire I.

16. Les eſpaces NE, ne, ſont les eſpaces que le Corps parcourt pendant les tems BC, Bc, de plus ou de moins que les eſpaces PN, pn qu'il eût parcourus uniformément avec la viteſſe qu'il a en D. Or ſi on ſuppoſe les tems BC, Bc, infiniment petits, les lignes NE, ne, ſont entr'elles comme le quarré de BC au quarré de Bc. Car l'arc DE à cauſe de ſa petiteſſe infinie, peut être regardé comme un arc de cercle; or ſoit DN (Fig. 5) la partie infiniment petite de la tangente d'un arc de cercle; & par le point N, & un autre point n quelconque de cette partie, ſoient tirées à volonté les parallèles NQ, nq; on aura par la propriété du cercle $NE \times NQ = DN^2$; $ne \times nq = Dn^2$; & à cauſe que les lignes nq, NQ doivent être regardées comme égales, on aura $NE : ne :: DN^2 : Dn^2$. Or (Fig. 3 & 4) $DN : Dn :: BC : Bc$, & par conſéquent en général $NE : ne :: BC^2 : Bc^2$.

Corollaire II.

17. Il eſt clair que les eſpaces NE, ne, ſeroient ceux

que la *cauſe accélératrice* feroit parcourir au corps, dans les inſtans BC, Bc, ſi au commencement de ces inſtans il n'avoit aucune viteſſe. Donc les eſpaces parcourus par un corps en vertu d'une puiſſance accélératrice quelconque, ſont au commencement du Mouvement comme les quarrés des tems.

COROLLAIRE III.

18. Donc en regardant BC ou dt comme conſtant, on pourra ſuppoſer $\frac{NE}{BC^2} = F$, F étant une quantité quelconque (3) qui variera ſi l'on veut pour chaque abſciſſe AB, mais qui pourra être cenſée conſtante, tant que AB ne variera qu'infiniment peu.

COROLLAIRE IV.

19. Si dans un cercle quelconque RDQ (Fig. 5) on tire les cordes infiniment petites RD, DE, leſquelles ſoient égales, ou différent l'une de l'autre d'une quantité infiniment petite par rapport à elles, & qu'on prolonge RD en O enſorte que $DO = RD$, qu'enfin on mene par les points O, E la ligne OQ & par le point D la tangente DN qui rencontre OQ en N; on

(3) La proportion $NE : ne :: BC^2 : Bc^2$ donne $\frac{NE}{BC^2} = \frac{ne}{Bc^2}$; donc ſi $\frac{NE}{BC^2}$ eſt exprimé par F, $\frac{ne}{Bc^2}$ ſera auſſi exprimé par F, F gardant la même valeur, & par conſéquent F reſte la même lorſque AB varie infiniment peu.

Digitized by Google

aura par la propriété du cercle $DN^2 = NE \times NQ$; $OD \times OR$ ou $2DO^2 = OE \times OQ$; donc à cause que les lignes DN & DO, NQ & OQ doivent être regardées comme égales, on aura $OE = 2NE$ (4).

Donc si on considere l'Elément DE d'une courbe quelconque ADE (Fig. 3 & 4) comme un petit arc de cercle, ce qu'on peut supposer sans erreur, il s'ensuit que la différence seconde OE de l'espace parcouru, est double de l'espace réel NE, que la puissance accélératrice ou retardatrice feroit parcourir au corps dans l'instant BC; quoique ces deux lignes OE, NE paroissent être égales dans la courbe considérée comme polygone, parce qu'alors la tangente DN se confond avec le prolongement DO du petit côté RD de la courbe.

COROLLAIRE V.

20. Donc si on appelle e l'espace parcouru BD pendant le tems t, on aura $dde = 2NE$, & puisque $\frac{NE}{BC^2} = F$, on aura $\frac{dde}{dt^2} = 2F$; donc en général l'on peut sup-

(4) Lorsque les lignes OD, DE, sont égales, on peut démontrer rigoureusement que $OE = 2NE$. Car le triangle DOE est isoscele, l'angle ODE a pour mesure la moitié de l'arc RDE, & l'angle NDE la moitié de l'arc DE. D'où il s'ensuit que DN divise l'angle ODE en deux également, & qu'ainsi à cause de $DO = DE$, on a $OE = 2NE$. mais la démonstration que nous avons donnée dans le texte, s'étend encore au cas où OD, DE différeroient d'une quantité infiniment petite par rapport à elles, & par conséquent ne seroient pas rigoureusement égales.

Digitized by Google

poſer que l'équation différentio-différentielle de la Courbe ADE eſt $\varphi dt^2 = \pm ddc$, φ exprimant une fonction quelconque de e & de t, ou même de ces grandeurs & de leurs différences; le ſigne $+$ étant pour le cas où le Mouvement eſt accéléré, c'eſt-à-dire, ou la courbe ADE eſt convexe vers AC, & le ſigne $-$ pour le cas où le Mouvement eſt retardé, c'eſt-à-dire, ou la courbe ADE eſt concave vers AC.

COROLLAIRE VI.

21. Puiſque (*art.* 15) $u = \frac{de}{dt}$, on aura à cauſe de dt conſtant, $ddc = dudt$; donc l'équation précédente $\varphi dt^2 = \pm ddc$ ſe changera en celle-ci $\varphi dt = \pm du$, ou $\varphi de = \pm udu$.

Remarques ſur les forces accélératrices, & ſur la comparaiſon de ces forces entr'elles.

REMARQUE I.

22. Le Mouvement uniforme d'un Corps ne peut être altéré que par quelque cauſe étrangere. Or de toutes les cauſes, ſoit occaſionnelles, ſoit immédiates, qui influent dans le Mouvement des corps, il n'y a tout au plus que l'impulſion ſeule dont nous ſoyons en état de déterminer l'effet par la ſeule connoiſſance de la cauſe, comme on le verra dans la ſeconde Partie de cet Ouvrage. Toutes les autres cauſes nous ſont entiérement inconnues; elles ne peuvent par conſéquent ſe manifeſter à nous, que par

Digitized by Google

l'effet qu'elles produiſent en accélérant ou retardant le Mouvement des corps, & nous ne pouvons les diſtinguer les unes des autres que par la loi & la grandeur connue de leurs effets, c'eſt-à-dire, par la loi & la quantité de la variation qu'elles produiſent dans le Mouvement. Donc, lorſque la cauſe eſt inconnue, ce qui eſt le ſeul cas dont il ſoit queſtion ici, l'équation de la courbe *ADE* doit être donnée immédiatement, ou en termes finis, ou en quantités différentielles. L'équation eſt donnée ordinairement en différences, lorſque le Mouvement eſt accéléré ou retardé ſuivant une loi arbitraire & de pure hypotheſe. Elle eſt au contraire donnée ordinairement en termes finis, quand la loi du rapport des eſpaces aux tems eſt découverte par l'expérience. Ainſi ſuppoſons que la puiſſance qui accélere, ſoit telle que le corps reçoive continuellement dans des inſtans égaux des degrés égaux de viteſſe; alors dt étant conſtant, du le ſera auſſi, & par conſéquent φ ſera une quantité conſtante. L'équation $\varphi\, dt = du$ ſera en ce cas donnée immédiatement par hypotheſe. Suppoſons, au contraire, que dans un cas particulier on découvre par l'expérience que les eſpaces finis parcourus depuis le commencement du Mouvement, ſont comme les quarrés des tems employés à les parcourir, l'équation de la courbe *ADE* ſera $e = \frac{a\,t^2}{T^2}$, a étant l'eſpace parcouru pendant un tems conſtant quelconque T; d'où l'on tire $dde = \frac{2\,a\,dt^2}{T^2}$ & $du = \frac{2\,a\,dt}{T^2}$.

Digitized by Google

On voit par-là que dans cette ſuppoſition les accroiſſemens de viteſſe à chaque inſtant ſont égaux, ce qu'on exprime autrement en diſant que la force accélératrice φ eſt conſtante; ainſi dans ce cas & dans d'autres ſemblables, les équations différentielles $\varphi dt^2 = \pm dde$, $\varphi dt = \pm du$, ſe tirent de l'équation donnée de la courbe ADE en termes finis.

Il eſt donc évident que quand la cauſe eſt inconnue, l'équation $\varphi dt = \pm du$ eſt toujours donnée (5).

La plûpart des Géometres préſentent ſous un autre point de vûe l'équation $\varphi dt = du$ entre les tems & les viteſſes. Ce qui n'eſt, ſelon nous, qu'une hypotheſe, eſt érigé par eux en principe. Comme l'accroiſſement de la

(5) On vient de voir que de quelque maniere que le mouvement ſoit accéléré ou retardé, l'équation différentio-différentielle de la courbe ſera toujours de cette forme $\pm dde = \varphi dt^2$. Or ſi on veut faire uſage de cette équation, ainſi que des équations $\varphi dt = \pm du$ & $\varphi de = \pm udu$ pour déterminer dans un mouvement quelconque la relation entre u, t, e, il faut connoître φ, & l'on pourroit penſer que pour cet effet la connoiſſance de la cauſe qui accélere ou retarde le mouvement ſeroit néceſſaire; l'objet de la Remarque eſt de faire voir que non, mais que φ eſt toujours donné par la définition même de l'eſpece de mouvement dont il eſt queſtion; ainſi, conformément à cette même Remarque, quand on voudra faire uſage des équations $\varphi dt^2 = \pm dde$, $\varphi dt = \pm du$ & $\varphi de = \pm udu$ pour déterminer la relation des eſpaces, des viteſſes & des tems dans un mouvement dont la loi ſera donnée, il ſuffira de ſubſtituer dans ces équations à la place de φ une quantité propre à exprimer la loi ſuivant laquelle on ſuppoſera que ſe font les augmentations ou diminutions de viteſſe: quand on ſuppoſera, par exemple, que les diminutions inſtantanées de viteſſe ſont comme les quarrés de la viteſſe, on écrira $gu^2dt = -du$, $gu^2de = -udu$ (g étant un coëfficient conſtant), & ainſi du reſte.

viteſſe

viteſſe eſt l'effet de la cauſe accélératrice, & qu'un effet, ſelon eux, doit être toujours proportionnel à ſa cauſe, ces Géometres ne regardent pas ſeulement la quantité φ comme la ſimple expreſſion du rapport de du à dt; c'eſt de plus, ſelon eux, l'expreſſion de la force accélératrice, à laquelle ils prétendent que du doit être proportionnel, dt étant conſtant; de là ils tirent cet axiome général, que le produit de la force accélératrice par l'élément du tems eſt égal à l'élément de la viteſſe. M. *Daniel Bernoulli* (*Mém. de Peterſb. To. I.*) prétend que ce principe eſt ſeulement de vérité contingente, attendu qu'ignorant la nature de la cauſe & la maniere dont elle agit, nous ne pouvons ſavoir ſi ſon effet lui eſt réellement proportionnel, ou s'il n'eſt pas comme quelque puiſſance ou quelque fonction de cette même cauſe. M. *Euler*, au contraire, s'eſt efforcé de prouver fort au long dans ſa Mécanique, que ce principe eſt de vérité néceſſaire. Pour nous, ſans vouloir diſcuter ici ſi ce principe eſt de vérité néceſſaire ou contingente, nous nous contenterons de le prendre pour une définition, & d'entendre ſeulement par le mot de force accélératrice, la quantité à laquelle l'accroiſſement de la viteſſe eſt proportionnel. Ainſi au lieu de dire que l'accroiſſement de viteſſe à chaque inſtant eſt conſtant, ou que cet accroiſſement eſt comme le quarré de la diſtance du corps à un point fixe, ou &c. nous dirons ſimplement pour abréger & pour nous conformer d'ailleurs au langage ordinaire, que la force accélératrice eſt conſtante, ou qu'elle eſt comme le quarré

Digitized by Google

de la distance, ou &c. & en général, nous ne prendrons jamais le rapport de deux forces que pour celui de leurs effets, sans examiner si l'effet est réellement comme sa cause, ou comme une fonction de cette cause : examen entierement inutile, puisque l'effet est toujours donné indépendamment de la cause, ou par expérience, ou par hypothese.

Ainsi nous entendrons en général par la force motrice le produit de la masse qui se meut par l'élément de sa vitesse, ou, ce qui est la même chose, par le petit espace qu'elle parcourroit dans un instant donné en vertu de la cause qui accélere ou retarde son Mouvement; par force accélératrice, nous entendrons simplement l'élément de la vitesse. Après de pareilles définitions, il est aisé de voir que tous les Problêmes qu'on peut propoſer sur le Mouvement des Corps mûs en ligne droite, & animés par des forces qui tendent vers un centre, ou exerçant les uns sur les autres une attraction mutuelle suivant une loi quelconque, sont des problêmes qui appartiennent pour le moins autant à la Géométrie qu'à la Mécanique, & dans lesquels la difficulté n'est que de calcul, pourvû que le mobile soit regardé comme un point.

On imagineroit peut-être que l'équation $\varphi dt = \pm du$ regardée, non comme hypothese, mais comme principe, seroit au moins nécessaire pour calculer les effets dont les causes sont connues, comme l'impulsion, surtout quand cette impulsion consiste en de petits coups réitérés. J'espere qu'on verra dans la seconde Partie de

Digitized by Google

cet Ouvrage, que non-seulement ce prétendu principe est encore inutile dans ce cas, mais que l'application en est insuffisante & pourroit même être fautive.

REMARQUE II.

23. Il n'est pas inutile de remarquer que quand on a d'abord l'équation entre e & t en termes finis, & qu'on en tire par la différentiation à l'ordinaire l'équation $ddx = \varphi\, dt^2$, la valeur de ddx qu'on trouve par ce calcul est précisément celle de OE, véritable différence seconde de BD; on pourroit d'abord douter (6),

(6) Il suffit pour former ce doute de se rappeller le principe d'après lequel on trouve les différences secondes. Supposant $AM = t$ (Pl. V. fig. 2.) & $MP =$ une fonction de t que je représente par $\varphi(t)$; pour avoir ID on suppose que t devienne $t + dt$, & alors BD étant $= \varphi(t+dt)$, on a $ID = \varphi(t+dt) - \varphi(t)$ en négligeant les quantités infiniment petites du second ordre & des ordres ultérieurs. Ensuite pour avoir EO on suppose dans la valeur de ID que t devienne $t + dt$, & on néglige dans ce calcul les quantités infiniment petites du troisieme ordre & des ordres ultérieurs pour avoir la valeur de RE, ensorte qu'on prend pour ddx la différence entre cette valeur de RE, & celle qu'on a trouvé pour ID. Mais il faut remarquer que puisque dans la valeur de ID on a négligé les quantités du second ordre, cette omission peut influer sur la différence cherchée des lignes ID, RE, laquelle différence est infiniment petite du second ordre, par conséquent on n'est en droit de conclure que OE est égal à la valeur de ddx, qu'autant qu'on aura fait voir que l'omission dont il s'agit, ne produit dans le calcul qu'une erreur infiniment petite au-dessous du second ordre.

Pour y parvenir nous allons d'abord démontrer une proposition que notre Auteur a donnée dans ses *recherches sur le système du monde*. Soit $\varphi(z+\xi)$ une fonction de $z+\xi$, ξ étant une quantité très-petite dont on suppose que z augmente, on aura $\varphi(z+\xi) = \varphi(z) + \xi\Delta(z) + \frac{\xi^2 \Gamma(z)}{2} +$ &c.

vû la nature même du calcul différentiel, ſi la valeur de dde trouvée par cette différentiation repréſente véritablement OE, ou quelque autre ligne, par exemple NE. Mais on peut ſe convaincre par le calcul même que la quantité trouvée ϕdt^2 eſt égale à OE.

REMARQUE III.

24. Nous avons vû ci-deſſus (*art.* 15.) que quand les

$\Delta(z)$ étant le coëfficient de dz dans la différentiation de $\phi(z)$, & $\Gamma(z)$ celui de dz dans la différentiation de $\Delta(z)$. Car ſi on ſuppoſe $\phi(z+\xi) = \phi(z) + u$ & qu'on différentie en ſuppoſant z conſtant (ce qui eſt permis ici, puiſqu'on ſuppoſe que z ne croit actuellement que de la quantité ξ) on aura $d\xi\,\Delta(z+\xi) = du$; ſoit $\Delta(z+\xi) = \Delta(z) + r$, on aura $d\xi\,\Gamma(z+\xi) = dr$; ſoit $\Gamma(z+\xi) = \Gamma(z) + s$, on aura $d\xi\,\Pi(z+\xi) = ds$, donc en continuant de la même maniere, on aura $\phi(z+\xi) = \phi(z) + \int d\xi\,\Delta(z) + \int d\xi \int d\xi\,\Gamma(z) + \int d\xi \int d\xi \int d\xi\,\Pi(z)$ &c.

$= \phi(z) + \xi\,\Delta(z) \frac{\xi^2\,\Gamma(z)}{2} + \frac{\xi^3\,\Pi(z)}{2.3}$ + &c.

Cela poſé, MP étant $= \phi(t)$ on a

$BD = \phi(t + dt) = \phi(t) + dt\,\Delta(t) + \frac{dt^2\,\Gamma(t)}{2}$ + &c.

$CE = \phi(t + 2dt) = \phi(t) + 2dt\,\Delta(t) + 2dt^2\,\Gamma(t)$ + &c.

Donc $ID = dt\,\Delta(t) + \frac{dt^2\,\Gamma(t)}{2}$

$RE = dt\,\Delta(t) + \frac{1}{2}dt^2\,\Gamma(t)$

$RE - ID$ ou $- OE$ ou $- dde = dt^2\,\Gamma(t)$.

Mais par les méthodes ordinaires du calcul différentiel, on auroit

$ID = dt\,\Delta(t)$

$RE = dt\,\Delta(t + dt) = dt\,\Delta(t) + dt^2\,\Gamma(t)$

donc $RE - ID$ ou $- OE$ ou $- dde = dt^2\,\Gamma(t)$.

Donc le dde que donne le calcul différentiel eſt en effet la vraie valeur de OE.

Digitized by Google

eſpaces parcourus ſont comme les quarrés des tems correſpondans, un Corps qui parcourt un eſpace E dans le tems T, parcourroit uniformément dans le même tems l'eſpace $2E$ avec la viteſſe qu'il a à l'extrémité de l'eſpace E. Or quelle que ſoit la puiſſance accélératrice ou retardatrice, les eſpaces ne, NE parcourus en vertu de cette puiſſance, durant les inſtans Bc, BC, ſont entr'eux comme les quarrés de ces inſtans. D'où il s'enſuit que dans la courbe polygone, OE ou $dde = 2NE$ conſidérée comme l'effet de la puiſſance accélératrice ou retardatrice, doit être regardée comme parcourue d'un mouvement uniforme avec la viteſſe infiniment petite que le corps a acquis à la fin de l'inſtant BC. On voit par-là de quelle maniere on peut réduire à un mouvement uniforme l'effet inſtantané de la puiſſance qui accélere ou qui retarde le mouvement.

REMARQUE IV.

25. Dans la courbe polygone les effets de la force accélératrice pendant les inſtans Bc, BC (Pl. V. fig. 3.) ſont repréſentés par les lignes $O'E'$, OE; ces eſpaces $O'E'$, OE ſont évidemment entr'eux comme les tems Bc, BC, à cauſe des triangles ſemblables $D.E'O'$, DEO; & cette propoſition ſert à confirmer ce que nous venons de remarquer, que l'eſpace OE eſt cenſé parcouru uniformément pendant le tems BC; car quand les eſpaces $O'E'$, OE ſont entr'eux comme les tems Bc, BC employés à les parcourir, le mouvement eſt uniforme.

Digitized by Google

De là il s'enſuit, que puiſque dans la courbe polygone l'effet de la puiſſance accélératrice eſt repréſenté par un mouvement uniforme, on ne doit point ſuppoſer dans cette hypotheſe que la viteſſe du corps s'accélere par degrés pendant l'inſtant BC, mais qu'au commencement de cet inſtant BC, lorſque le corps a parcouru l'eſpace BD, ſa viteſſe reçoive bruſquement & comme d'un ſeul coup toute l'augmentation ou la diminution qu'elle ne doit réellement avoir qu'à la fin de l'inſtant BC.

Pour confirmer cette remarque, on peut obſerver que TE', RE (Pl. V. fig. 2.) ſont les eſpaces que le corps parcourt réellement durant les inſtans Bc, BC, dans l'hypotheſe de la courbe polygone; que ces eſpaces ſont parcourus uniformément, puiſqu'ils ſont entr'eux comme les tems Bc, BC; qu'ainſi la viteſſe pendant l'inſtant BC eſt cenſée uniforme, & qu'elle eſt à la viteſſe dans l'inſtant précédent BM comme RE eſt à ID. D'où il s'enſuit qu'au commencement de l'inſtant BC, la viteſſe change bruſquement, ſuivant le rapport de RE à ID.

Au contraire dans la courbe rigoureuſe, les effets de la puiſſance accélératrice ou retardatrice pendant les inſtans Bc, BC, ſont repréſentés par ne, NE (Pl. V. fig. 3.) & ſont entr'eux, comme les quarrés de ces inſtans; dans ce cas la viteſſe eſt cenſée s'accélérer ou ſe retarder uniformément pendant tout le cours de l'inſtant BC, en vertu de la puiſſance accélératrice, qui eſt cenſée donner au mobile pendant cet inſtant une ſuite de pe-

Digitized by Google

tits coups égaux & réitérés ; & la ſomme de ces petits coups eſt égale au coup unique, que la même puiſſance eſt cenſée donner au corps dès le commencement de l'inſtant BC dans l'hypotheſe de la courbe polygone.

On pourroit faire ici une difficulté qu'il eſt bon de prévenir. L'équation trouvée $ddc = \varphi dt^2$ à la courbe rigoureuſe & appartient à la courbe polygone ; donc puiſque φ eſt regardée comme conſtante pendant l'inſtant BC, ddc ou OE eſt proportionnelle à dt^2, c'eſt-à-dire au quarré de BC, même dans la courbe polygone ; cependant nous venons de voir que les lignes $E'O'$, EO ſont proportionnelles aux lignes Bc, BC. Comment accorder ces deux propoſitions ? La réponſe eſt très-ſimple ; c'eſt que $E'O'$ n'eſt pas le ddc qui répond à l'inſtant Bc ; comme il eſt facile de s'en aſſurer (7) par la ſeule inſpection de la figure 3. Planche V.

(7) Il faut remarquer que ce qui détermine EO pour la différence ſeconde de la ligne MP, c'eſt la ſuppoſition que les trois points P, D, E ſoient à la courbe rigoureuſe ; or PD, DE étant conſidérées comme ſoutendantes de cette courbe, il eſt impoſſible que le point E' lui appartienne, ainſi $E'O'$ n'eſt point le ddc qui répond à Bc. EO étant ſuppoſé le ddc qui répond à BC, pour déterminer celui qui répond à Bc, il faut prendre $Bm = Bc$, & ayant tiré mp parallèle à BD, qui rencontre la courbe en p, on tirera pDo, qui rencontre en o la ligne ceo parallèle à BD, & alors eo ſera le ddc qui répond à Bc ; il y aura ſeulement cette différence, que la courbe polygone, au lieu d'être conſidérée comme ayant DP & DE pour côtés contigus, ſera conſidérée comme ayant Dp & De pour côtés ; par conſéquent (DN étant la tangente de la courbe rigoureuſe au point D, & oe double de ne) puiſqu'on a $NE : ne :: BC^2 : Bc^2$, on a auſſi $OE : oe :: BC^2 : Bc^2$; ainſi les ddc ſont toujours comme les dt^2, & les lignes OE, $O'E'$ terminées à la courbe polygone & à ſa tangente reſtent comme les dt^2.

REMARQUE V.

26. Les Géometres doivent prendre garde à cette distinction des courbes polygones & des courbes rigoureuses, dans l'estimation des effets des forces accélératrices & dans la comparaison de ces effets entr'eux. Si un des effets est calculé dans l'hypothese de la courbe rigoureuse, il faut calculer l'autre dans la même hypothese; autrement on courroit risque de faire le rapport des forces, c'est-à-dire de leurs effets, double de ce qu'il est réellement (8).

REMARQUE VI.

27. Si on suppose une puissance accélératrice constante p telle que la pesanteur, en vertu de laquelle un

(8) On peut estimer l'effet d'une cause accélératrice de deux manieres; ou par l'espace qu'elle fait naturellement parcourir dans un instant, ou par celui que le corps pourroit parcourir pendant un instant égal avec la viteſſe acquiſe pendant ce premier inſtant, continuée uniformément. Dans le premier cas, NE (fig. 3. & 4.) marque cet effet, DN étant tangente de la courbe rigoureuſe; dans le ſecond cas, l'effet eſt marqué par OE double de NE, DO étant tangente de la courbe polygone. On eſt maître d'eſtimer l'effet de la cauſe accélératrice de l'une ou de l'autre de ces deux manieres; mais lorſqu'on aura deux cauſes accélératrices à comparer, il faudra obſerver que ſi on a exprimé un des effets par NE dans la courbe qui repréſente les eſpaces que l'une fait décrire, l'autre effet ſoit de même exprimé dans ſa courbe correſpondante par la ligne correſpondante; & c'eſt là ce qu'on entend lorſqu'on dit que ſi un des effets a été calculé dans l'hypotheſe de la courbe rigoureuſe, l'autre doit être calculé dans la même hypotheſe &c.

corps

Digitized by Google

corps parcourre l'eſpace fini z pendant le tems fini θ, on aura $\varphi : p :: \frac{dde}{dt^2} : \frac{2z}{\theta^2}$ (9), ou $\varphi : p :: \frac{NE}{dt^2} : \frac{z}{\theta^2}$.

Donc $\varphi\, dt^2 = \frac{p\, dde\, .\, \theta^2}{2z}$ ou $dde = \frac{2\varphi z\, dt^2}{p\theta^2}$, & $NE = \frac{\varphi z\, dt^2}{\theta^2}$.

Il faut ſe donner de garde d'écrire $dde = \frac{\varphi z\, dt^2}{p\theta^2}$, comme on pourroit y être porté en prenant dde pour NE; car il eſt évident que par cette opération on

(9) On ſe propoſe dans cette Remarque de comparer toute force accélératrice à la peſanteur; & voici le fondement de cette comparaiſon: l'équation $\varphi\, dt^2 = dde$ donne $\varphi = \frac{dde}{dt^2}$; par la même raiſon $p = \frac{dd z}{d\theta^2}$; mais au lieu du rapport $\frac{dd z}{d\theta^2}$ on peut ſubſtituer un rapport de quantités finies, en obſervant que les eſpaces parcourus naturellement en vertu d'une puiſſance accélératrice conſtante, ſont comme les quarrés des tems; ainſi on a $d\theta^2 : \theta^2 :: \frac{dd z}{2} : z$; (on obſervera que nous avons mis $\frac{dd z}{2}$ dans la proportion, & non pas $dd z$, parce que $dd z$, comme on l'a déja dit, eſt double de l'eſpace réel, que la puiſſance feroit naturellement parcourir pendant l'inſtant $d\theta$.) On aura donc $\frac{dd z}{d\theta^2} = \frac{z}{\theta^2}$, & par conſéquent $\varphi : p :: \frac{dde}{dt^2} : \frac{2z}{\theta^2}$, ce qu'on peut encore démontrer d'une autre maniere; car en intégrant l'équation $p\, d\theta^2 = dd z$ on a l'équation $p\theta^2 = 2z$, qui étant comparée à l'équation $dde = \theta\, dt^2$ donne la même proportion.

Digitized by Google

n'auroit que la moitié de la valeur de $d\,d\,e$ qui eſt égal à $2\,NE$; ainſi en intégrant on n'auroit que la moitié de la valeur de e. Veut-on s'en aſſurer par un exemple ſimple? Qu'on ſuppoſe $\varphi = p$, c'eſt à-dire la puiſſance conſtante & égale à la peſanteur; on ſait que les eſpaces e, z, ſont alors entr'eux comme les quarrés des tems t^2, θ^2; donc on a $e = \frac{z\,t^2}{\theta^2}$, & c'eſt ce que donne en effet (quand on l'integre) l'équation $d\,d\,e = \frac{2\,\varphi\,z\,d\,t^2}{p\,\theta^2}$ ou $d\,d\,e = \frac{2\,z\,d\,t^2}{\theta^2}$: au lieu que l'équation $d\,d\,e = \frac{z\,d\,t^2}{\theta^2}$ ne donneroit que $e = \frac{z\,t^2}{2\,\theta^2}$, c'eſt-à-dire la moitié de la valeur de e.

Digitized by Google

CHAPITRE II.

Du Mouvement composé.

THÉOREME.

28. *SI deux puiſſances quelconques agiſſent à la fois ſur un corps ou point* A (Fig. 6.) *pour le mouvoir, l'une de* A *en* B *uniformément pendant un certain tems, l'autre de* A *en* C *uniformément pendant le même tems, & qu'on acheve le parallélogramme* A B D C; *je dis que le corps* A *parcourra la diagonale* A D *uniformément, dans le même tems qu'il eût parcouru* A B *ou* A C.

Soit Ag la ligne inconnue parcourue par le corps A; il eſt certain (*art.* 6) que cette ligne ſera une ligne droite, & que le corps A la parcourra uniformément. Il n'eſt pas moins évident qu'elle ſera dans le plan des lignes AB, AC, puiſqu'il n'y a pas de raiſon pourquoi elle s'écarte de ce plan plutôt d'un côté que de l'autre. De plus, ſi lorſque le corps eſt arrivé à un point quelconque g de cette ligne, on ſuppoſoit que deux puiſſances vinſſent à agir ſur lui, dont l'une tendît à le mouvoir ſuivant gc parallèle à AC avec la même viteſſe qu'il a en A ſuivant AC, & en ſens contraire, & l'autre tendît à lui faire parcourir la ligne go égale

Digitized by Google

& parallèle à AB, & en ſens contraire, dans le même tems qu'il auroit parcouru AB, il eſt clair que le corps reſteroit en repos au point g. Car ſa viteſſe & ſa direction au point g eſt préciſément la même, que s'il étoit animé en ce point par deux puiſſances égales & parallèles aux puiſſances ſuivant AB & AC, & par conſéquent égales & contraires aux puiſſances ſuivant go, gc.

Cela poſé, imaginons que le corps A qui décrit la ligne Ag, ſoit ſur un plan $KLMH$ qui puiſſe gliſſer librement entre les deux couliſſes KL, IM, parallèles à AC. Qu'on faſſe mouvoir ce plan entre les deux couliſſes, de maniere que tous ſes points g décrivent des lignes gc égales & parallèles à AC, dans le même tems que le corps A eût décrit la ligne AC; & qu'en même tems les deux couliſſes ſe meuvent en emportant le plan parallèlement à AB, & en ſens contraire, avec une viteſſe égale à celle que le corps A auroit eûe ſuivant AB; il eſt évident que tous les points g du plan décriront uniformément des lignes ga, égales & parallèles à la diagonale AD du parallélogramme BC. Il eſt de plus évident que le corps ou point mobile A, eſt tiré continuellement en cet état par quatre puiſſances contraires & égales deux à deux, & que par conſéquent il doit reſter en repos dans l'eſpace abſolu. D'où il s'enſuit, que quand le corps ou point mobile A eſt arrivé à un point g du plan, ce point g doit ſe trouver à la place que le corps occupoit quand il a commencé de ſe mouvoir. Ce qui ne ſauroit être, à moins que la ligne Ag ne tombe

Digitized by Google

sur la diagonale AD, & le point g sur le point D (10). Donc &c.

Remarque.

29. La démonstration qu'on apporte d'ordinaire du Théorême précédent, consiste à imaginer que le point A se meuve uniformément sur une regle AB avec la viteſſe qu'il a reçûe suivant AB, & qu'en même tems la ligne ou regle AB se meuve suivant AC avec la viteſſe que le corps A a reçûe suivant AC. On prouve très-bien dans cette supposition, que le point mobile A décrit la diagonale AD. En général la plûpart des démonstrations communes de cette proposition sont fondées sur ce qu'on regarde les deux puissances suivant AB & AC, comme agissant sur le corps A pendant tout le tems de son mouvement, ce qui n'est pas préciſément l'etat de la question. Car l'hypotheſe est, que le corps A tend à se mouvoir au premier instant suivant AB & AC à la fois, & l'on demande la direction & la viteſſe qu'il doit avoir en vertu du concours d'action des deux puiſſan-

(10) Puiſque le point mobile A doit rester en repos dans l'espace absolu, il faut que le mouvement du plan sur lequel on le suppoſe, l'emporte en sens contraire préciſément de la même quantité dont il se seroit avancé sans le mouvement du plan; donc quand il a décrit une ligne $= Ag$, le point du plan qui étoit en g, au commencement du mouvement, doit avoir décrit gA & être par conſéquent en A; d'un autre côté ce point a dû décrire une ligne parallèle à la diagonale AD; donc la ligne Ag ne peut être que la diagonale même.

Digitized by Google

ces. Dès qu'il a pris une direction moyenne AD, les deux tendances suivant AB & AC n'existent plus; il n'y a plus de réel que sa tendance suivant AD.

J'ai donc crû devoir prévenir cette difficulté, & faire voir que le chemin du corps A est le même, soit que les deux puissances n'agissent sur lui que dans le premier instant, soit qu'elles agissent continuellement toutes deux à la fois sur le corps. C'est à quoi je crois être parvenu dans la démonstration que j'ai donnée ci-dessus.

COROLLAIRE I.

30. Si un corps parcourt ou tend à parcourir une ligne droite AC (Fig. 7) avec une vitesse quelconque, & qu'on prenne un point B partout où l'on voudra sur cette ligne AC prolongée ou non, la vitesse AC pourra être regardée comme composée de la vitesse AB & de la vitesse BC. Car AC peut être regardée comme la diagonale d'un parallélogramme, dont AB, BC sont les côtés. Donc &c.

REMARQUE.

31. Quelques Lecteurs pourront être surpris de ce que je tire la démonstration d'une proposition si simple en apparence, d'un cas général beaucoup plus composé; mais on ne peut, ce me semble, démontrer autrement la proposition dont il s'agit ici, qu'en regardant comme un axiome inconteſtable, que l'effet de deux causes conjointes est égal à la somme de leurs effets pris séparé-

Digitized by Google

ment, ou que deux causes agissent conjointement comme elles agiroient séparément; principe qui ne me paroît pas assez évident, ni assez simple, qui tient d'ailleurs de trop près à la question des forces vives, & au principe des forces accélératrices dont nous avons parlé ci-dessus *art.* 22. C'est la raison qui m'a obligé à éviter d'en faire usage, ayant d'ailleurs pour but dans ce Traité de réduire la Mécanique au plus petit nombre de principes possible, & de tirer tous ces principes de la seule idée du mouvement, c'est-à-dire de l'espace parcouru & du tems employé à le parcourir, sans y faire entrer en aucune façon les puissances & les causes motrices.

COROLLAIRE II.

32. Si un corps est poussé suivant AB & AC (Fig. 8) par deux puissances accélératrices quelconques, sa direction sera la diagonale d'un parallélogramme fait sur des côtés AB, AC, proportionnels aux forces accélératrices suivant AB & AC; & sa force accélératrice suivant AD sera à chacune des deux suivant AB & AC, comme AD est à AB & AC. Car soient Ab & Ac les espaces que le corps A eût parcourus dans le commencement de son mouvement en vertu de chacune des puissances, on aura (*art.* 22) $Ab : Ac :: AB : AC$. Donc les lignes bd, cd, parallèles à AC, AB concourront au point d de la diagonale AD. De même si $A\beta$, Ax, sont les espaces parcourus en tems égaux en vertu de ces mêmes puissances, on aura $Ab . A\beta ::$.

Digitized by Google

le quarré du tems par Ab ou par Ac au quarré du tems par $A\beta$ ou par Ax, c'eſt-à-dire comme Ac eſt à Ax; donc le point de concours δ des lignes $\beta\delta$, $x\delta$, ſera encore ſur la diagonale AD. Donc ſi on ſuppoſe que le corps A ſe meuve ſur la regle AB au premier inſtant, avec la force accélératrice qu'il a ſuivant AB, & que la puiſſance accélératrice ſuivant AC, agiſſe en même-tems ſur la regle pour la porter de A vers C, le point A décrira la diagonale Ad, dans le même tems qu'il auroit décrit Ab ou Ac, & ſa force accélératrice ſuivant AD, ſera à chacune des forces ſuivant les côtés, comme la diagonale à chacun de ces mêmes côtés.

De là on voit, comment à une force accélératrice quelconque, on peut en ſubſtituer d'autres, en tel nombre qu'on voudra.

Au reſte, comme nous avons vû ci-deſſus (*art.* 24) de quelle maniere on peut réduire à un mouvement uniforme l'effet inſtantané d'une puiſſance quelconque; il eſt clair que la combinaiſon des effets de tant de puiſſances qu'on voudra, & la recherche de l'effet unique qui en réſulte, ſe réduit par là fort aiſément aux loix du mouvement compoſé uniforme.

Du Mouvement en ligne courbe, & des forces centrales.

33. Comme un corps tend de lui-même à ſe mouvoir en ligne droite, il ne peut décrire une ligne courbe, qu'en vertu de l'action d'une puiſſance qui le détourne

ne continuellement de sa direction naturelle. On peut déduire de l'article précédent, les principes du mouvement d'un corps sur une courbe.

Il est démontré qu'un arc infiniment petit d'une courbe quelconque, peut être pris pour un arc de cercle, dont le rayon seroit égal au rayon de la développée de cet arc de la courbe. On réduit par ce moyen le mouvement d'un corps sur une courbe quelconque, au mouvement de ce même corps sur un cercle dont le rayon change à chaque instant.

La puissance qui retient un corps sur une courbe, est appellée particuliérement *force centrale*, quand elle est toujours dirigée vers un point fixe; mais nous la nommerons ici *force centrale* en général, soit qu'elle tende vers un point fixe ou non. Cette puissance n'est par sa nature qu'une puissance accélératrice ou retardatrice, dont la direction est différente de celle du corps. On peut, par tout ce qui a été dit ci-dessus, (*art.* 24 & 32) réduire à un mouvement uniforme l'effet instantané de cette puissance, en regardant comme un polygone d'une infinité de côtés la courbe qu'elle fait décrire au corps; & cet effet est double de celui que la force centrale produiroit dans la courbe considérée exactement comme courbe. Ainsi, supposons qu'un corps décrive un arc de cercle infiniment petit RDE, (Fig. 5) en vertu d'une puissance, qui au point D le détourne de la ligne droite suivant une direction donnée: si on regarde le cercle comme un polygone, la corde RD sera la ligne que le corps

Digitized by Google

aura décrite dans l'instant précédent, & DO égale & en ligne droite avec RD, celle qu'il tend à décrire l'instant suivant. Donc tirant OE parallèle à la direction de la force centrale en D, OE sera l'effet instantané de cette puissance; au contraire, si on considéroit le cercle comme cercle rigoureux, la tangente DN seroit la ligne que le corps tendroit à décrire, & NE l'effet de la puissance qui le retiendroit sur la courbe.

La ligne NE divisée par le quarré du tems employé à la parcourir, est (*art.* 18. 22 & 26) l'expression de la force accélératrice en vertu de laquelle le corps décrit la courbe; or cette ligne NE est égale au quarré de la ligne DN ou de l'arc DE ou RD, divisé par NQ, & NQ est au diametre du cercle, comme le sinus de l'angle que fait la force centrale avec la courbe, est au sinus total (11); de plus, la ligne DE divisée par le tems employé à la parcourir, est (*art.* 15) l'expression de la viteſſe du corps. Donc dans une courbe quelconque, l'effet de la force centrale est comme le quarré de la viteſſe divisé par le rayon de la développée, & multiplié par le rapport du sinus total au sinus de l'angle que fait cette force avec la courbe.

En général, l'élément du tems étant supposé constant, la force centrale est représentée par la ligne OE dans la courbe polygone, & par NE dans la courbe rigoureuse. Il faut par conséquent avoir égard à cette différence

(11) Car NQ ou EQ est le double du sinus de l'angle NED.

Digitized by Google

d'expreſſion dans la comparaiſon des effets de deux forces centrales; & pour ne pas faire l'un des effets double de ce qu'il eſt par rapport à l'autre, il faut conſidérer les deux courbes, ou toutes deux comme polygones, ou toutes deux comme rigoureuſes.

Les forces centrales, & en général toutes les forces accélératrices (ſi par le mot de *force* nous n'entendons que les effets) ſont entr'elles comme les petits eſpaces qu'un corps parcourt dans un même inſtant en vertu de ces forces. On a coutume de comparer toutes ces forces à la force accélératrice conſtante que nous connoiſſons le mieux, je veux dire à la peſanteur. Si E eſt l'eſpace qu'un corps peſant parcourt dans un tems fini T, $\frac{E\,dt^2}{T^2}$ ſera l'eſpace qu'il parcourra dans le tems dt, & ſi l'arc DE eſt ſuppoſé parcouru dans le même tems dt, la force centrale ſera à la peſanteur, comme la ligne NE à $\frac{E\,dt^2}{T^2}$, ou comme $OE = 2NE$ à $\frac{2E\,dt^2}{T^2}$.

Or ſoit r le rayon de la développée de la courbe en N, S le ſinus de l'angle que fait la direction de la force centrale avec la courbe, A le ſinus total, e l'eſpace que le corps parcourroit uniformément dans le tems T avec la viteſſe qu'il a en D, on aura $DE = \frac{e\,dt}{T}$; $OE = \frac{DE^2}{r} \times \frac{A}{S} = \frac{e^2\,dt^2 \cdot A}{T^2\,S\,r}$. Donc l'effet inſtantané de la peſanteur eſt à celui de la force centrale,

comme $2E$ à $\frac{e^2 A}{Sr}$ ou comme E à $\frac{e^2 A}{2rS}$; & ainſi le rapport de ces deux effets, que la plûpart des Géometres prennent pour celui des cauſes mêmes, eſt exprimé en termes finis (*).

CHAPITRE III.

Du Mouvement détruit ou changé par des obſtacles.

34. UN corps qui ſe meut, peut rencontrer des obſtacles qui alterent, ou même qui anéantiſſent tout-à-fait ſon mouvement ; ces derniers, ou ſont invincibles par eux-mêmes, ou n'ont préciſément de réſiſtance que ce qu'il en faut pour détruire le mouvement imprimé au corps.

Un obſtacle invincible peut être tel, qu'il ne permette au corps aucun mouvement, comme quand un corps tire une verge droite attachée à un point fixe ; ou l'obſtacle pourroit être de telle nature, qu'il n'empêchât pas le corps de ſe mouvoir dans une autre direction que celle qu'il a ; comme quand un corps rencontre un plan inébranlable.

35. Si l'obſtacle, invincible ou non, que le corps

(*) On trouvera dans l'*Encyclopédie* au mot FORCE, pluſieurs autres Théorémes & Remarques ſur la meſure de la force centrifuge. Ce que nous en diſons ici, ſuffit pour l'objet que nous nous propoſons.

Digitized by Google

rencontre, ne fait qu'altérer & changer ſon mouvement ſans le détruire, enſorte que le corps ayant, par exemple, la viteſſe a avant que de rencontrer l'obſtacle, il ſoit obligé de prendre une viteſſe b dont la quantité & la direction ſoit différente de la premiere ; il eſt évident qu'on peut regarder la viteſſe a que le corps a lorſqu'il rencontre l'obſtacle, comme compoſée de la viteſſe b & d'une autre viteſſe c, & qu'il n'y a que la viteſſe c qui ait été détruite par l'obſtacle.

36. De là il s'enſuit, qu'un corps ſans reſſort qui vient choquer perpendiculairement un plan immobile & impénétrable, doit s'arrêter après ce choc, & reſter en repos. Car il eſt viſible que ſi ce corps a du mouvement après la rencontre du plan, ce ne peut être qu'en arriere, & dans la direction de la perpendiculaire ; ſoit u ſa viteſſe avant le choc, v ſa viteſſe en arriere, que je ſuppoſe $= mu$, m exprimant un nombre inconnu quelconque, on aura (*art.* 30 & 35) $u = -mu + u + mu$. Donc $u + mu$ eſt la viteſſe perdue par le corps à la rencontre du plan. Mais il n'y a point de raiſon pourquoi m ſoit plutôt tel nombre que tel autre. Car la ſeule condition par laquelle on puiſſe déterminer la viteſſe $u + mu$, eſt qu'elle doit être détruite par le plan : or puiſque (*hyp.*) le plan eſt inébranlable, il n'y a point de raiſon pourquoi il anéantiroit plutôt la viteſſe $u + mu$, qu'une autre viteſſe $u + nu$. Donc le nombre m ne peut être plutôt tel nombre que tel autre. Donc il ſera zéro. En effet ; ſi la viteſſe $u + mu$ peut être anéantie par la rencontre

du plan, comme on le ſuppoſe, à plus forte raiſon la viteſſe u pourra être détruite par la rencontre de ce même plan. Donc elle ſera détruite réellement : donc mu, & par conſéquent v ſera $= o$. Donc &c.

COROLLAIRE I.

37. Si on ſuppoſe qu'un corps A (Fig. 9) mû ſuivant AB, rencontre le plan immobile & impénétrable BD ſur lequel il ſoit forcé de ſe mouvoir, ſa viteſſe ſuivant BD ſera à ſa viteſſe ſuivant AB ou BC, comme le ſinus du complément de l'angle CBD au ſinus total. Car il faudra regarder la viteſſe BC, comme compoſée de deux autres, dont l'une BE ſoit perpendiculaire au plan BD, & l'autre BD ſoit dans ce même plan : or la viteſſe BE étant détruite par le plan, le corps A n'aura plus que la viteſſe BD qui ſera à BC:: le ſinus de l'angle BCD, complément de CBD, au ſinus total.

COROLLAIRE II.

38. Si un corps ſe meut le long de pluſieurs plans AB, BC, CD, &c. (Fig. 10 & 11) qu'on prolonge AB, & BC indéfiniment en F & en E ; qu'enſuite d'un rayon arbitraire GL on décrive l'arc LM, & qu'on faſſe $LGM = CBF$; qu'ayant après cela abaiſſé la perpendiculaire MK, on décrive du rayon GK l'arc NK, tel que l'angle $KGN = DCE$, & qu'on mene la perpendiculaire NI, & ainſi de ſuite ; je dis que ſi on prend GL pour repréſenter la viteſſe ſuivant

Digitized by Google

AB, *GI* exprimera la viteſſe ſuivant *CD*. Cela ſuit évidemment du Corollaire précédent.

Corollaire III.

39. Donc la ſomme des viteſſes perdues de *A* en *D* eſt égale à *LI*, c'eſt-à-dire à la ſomme des ſinus verſes des angles *CBF*, *DCE*, &c. en prenant ſucceſſivement *GL*, *GK* &c. pour ſinus totaux.

Corollaire IV.

40. Donc en prenant *GL* pour ſinus total commun à tous les ſinus verſes, la viteſſe perdue ſera moindre que la ſomme de ces mêmes ſinus verſes.

Du Mouvement d'un Corps le long d'une ſurface courbe.

Lemme.

41. *Si dans un courbe* ABCDR (Fig. 12) *après avoir tiré les tangentes* AY, RY, *on inſcrit un polygone* ABCDR *dont les angles extérieurs* BAY, CBF, DCE, &c. *ſoient égaux entr'eux; je dis qu'on peut imaginer ce polygone d'un ſi grand nombre de côtés, que la ſomme des ſinus verſes des angles* BAY, CBF, DCE, RDS, &c. *ſoit moindre qu'une grandeur donnée.*

Car la ſomme des angles *BAY*, *CBF*, *DCE*, &c. eſt égale à l'angle *RYZ* fait par les tangentes *RY*, *AY* de la courbe. Donc ſi on fait l'angle *ryz* (Fig. 13) = *RYZ*, l'angle *ryn* = à un des angles *BAY* ou

Digitized by Google

CBF, & qu'on nomme n le nombre des angles; on aura, arc. $rn \times n =$ arc. $r\zeta$, & $\frac{\text{cord. } rn^2}{rh} \times n =$ à la somme des sinus verses. Mais $\frac{\text{cord. } rn^2}{rh} \times n < \frac{\text{arc. } rn^2 . n}{rh} = \frac{\text{arc. } r\zeta^2}{n.rh}$: soit l'arc $\frac{r\zeta^2}{rh} = \pi . rl$ (π étant un nombre donné, puisque les lignes rh, rl, & l'arc $r\zeta$ sont donnés); la somme des sinus verses sera donc $< \frac{\pi . rl}{n}$. Or puisque π & rl sont des quantités constantes, on peut rendre n si grand, que $\frac{\pi \times rl}{n}$ soit moindre qu'une grandeur donnée; donc à plus forte raison, la somme des sinus verses sera moindre que cette même grandeur donnée.

THÉOREME.

42. *Si un corps mû suivant une droite* XA (Fig. 12) *rencontre la surface courbe* AR, *touchée en* A *par* XA, *& sur laquelle il soit obligé de se mouvoir; je dis qu'il ne perdra de* A *en* R *aucune partie de sa viteſſe.*

Car on peut inscrire dans la courbe un polygone $ABCDR$ d'un si grand nombre de côtés, que la somme des sinus verses de ses angles extérieurs, soit toujours (*art.* 41) moindre qu'une grandeur donnée, & qu'ainsi à plus forte raison (*art.* 40) la viteſſe perdue de A en R soit toujours aussi petite qu'on voudra. Donc si

ſi ce polygone ſe confond avec la courbe, la viteſſe perdue de *A* en *R* ſera zéro.

COROLLAIRE.

43. Il réſulte de là, que quand un corps ſe meut ſur une courbe, ſa viteſſe à chaque point de la courbe eſt préciſément altérée de la même maniere, toutes choſes d'ailleurs égales, que s'il ſe mouvoit ſur la tangente de la courbe en ce point.

REMARQUE.

44. On démontre d'ordinaire ce dernier Théorême, en regardant la courbe comme un polygone *A B C D R* d'une infinité de côtés, dont les angles extérieurs *C B F* ſont infiniment aigus; les ſinus verſes de ces angles étant infiniment petits du ſecond ordre, on en conclut qu'un corps ne perd à chaque inſtant qu'une partie de viteſſe infiniment petite du ſecond genre, de ſorte que la perte totale de *A* en *R* n'eſt qu'infiniment petite du premier.

La démonſtration que j'ai donnée, quoique peut-être un peu longue, me paroît auſſi plus lumineuſe, d'autant que la viteſſe perdue de *A* en *R* eſt réellement & exactement nulle ou zéro, & non pas infiniment petite. Quand on veut démontrer en toute rigueur les propriétés des courbes, on tombe néceſſairement dans des démonſtrations un peu longues; la méthode des infiniment petits abrege beaucoup ces démonſtrations, mais elle n'eſt pas ſi rigoureuſe. Elle a de plus un autre inconvénient, c'eſt

Digitized by Google

que les Commençans qui n'en pénétrent pas toujours l'esprit, pourroient s'accoutumer à regarder ces infiniment petits comme des réalités ; c'est une erreur contre laquelle on doit être d'autant plus en garde, que de grands hommes y sont tombés, & qu'elle-même a donné occasion à quelques mauvais Livres contre la certitude de la Géométrie (*). La méthode des infiniment petits, n'est autre chose que la méthode des raisons premieres & dernieres, c'est-à-dire des rapports des limites des quantités finies. (**) Quand on a bien conçû l'esprit & les principes de cette Méthode, alors il est utile de la mettre en usage pour parvenir à des solutions élégantes.

De l'Equilibre.

45. Si les obstacles que le corps rencontre dans son mouvement, n'ont précisément que la résistance nécessaire pour empêcher le corps de se mouvoir ; on dit alors qu'il y a équilibre entre le corps & ces obstacles.

THÉOREME.

46. *Si deux corps dont les vitesses sont en raison in-*

(*) L'Ouvrage de M. *Mac-Laurin*, qui a pour titre, *A Treatise of fluxions*, a été publié à l'occasion d'un Livre Anglois intitulé, *The Analyst* &c. contre la certitude des Mathématiques, & dont la plûpart des argumens sont contre la Méthode des infiniment petits.

(**) Voyez l'*Encyclopédie*, aux mots DIFFÉRENTIEL & FLUXION. La Métaphysique du calcul différentiel est expliquée dans le premier de ces articles, d'une maniere qui ne doit laisser aucune difficulté.

Digitized by Google

verſe de leurs maſſes, ont des directions oppoſées, de telle maniere que l'un ne puiſſe ſe mouvoir ſans déplacer l'autre, il y aura équilibre entre ces deux corps.

PREMIER CAS.

1°. Si les deux corps ſont égaux & leurs viteſſes égales, il eſt évident qu'ils reſteront tous deux en repos. Car il n'y a point de raiſon pourquoi l'un ſe meuve plutôt que l'autre dans la direction qu'il a ; d'ailleurs il eſt clair par l'article 36, qu'ils ne peuvent ſe mouvoir dans une direction contraire. Donc &c.

Je ſuppoſe ici, afin que la démonſtration ne ſouffre aucune difficulté, que les deux corps ſoient non-ſeulement égaux, mais encore parfaitement ſemblables, que ce ſoient par exemple deux globes, deux parallélépipédes rectangles &c. Nous verrons plus bas (*art.* 57) la demonſtration du même Théorême dans le cas où les corps ne ſont pas ſemblables.

SECOND CAS.

Si l'un de ces corps reſtant dans le même état, on augmente du double la maſſe de l'autre, & qu'on diminue ſa viteſſe de la moitié, il y aura encore équilibre. Car on peut regarder (*art.* 30) la viteſſe du petit corps comme compoſée de deux viteſſes, égales chacune à la viteſſe du grand ; & la maſſe du grand, comme compoſée de deux maſſes égales, animées chacune de la même viteſſe. Donc à la place de chacune des maſſes propo-

Digitized by Google

ſées, on peut imaginer de chaque côté deux maſſes égales animées de viteſſes égales. Or dans cette derniere hypotheſe il y auroit équilibre (*Cas* 1.). Donc &c.

On peut encore démontrer cette propoſition de la maniere ſuivante. Soit m la maſſe du petit corps, $2m$ celle du grand, u la viteſſe du grand corps & par conſéquent $2u$ celle du petit. Je regarde la maſſe $2m$ du grand corps comme compoſée de deux maſſes m, m', égales chacune à la maſſe du petit; & au lieu de ſuppoſer chacune de ces deux maſſes m, m', animées de la viteſſe u, je ſuppoſe, ce qui revient au même, que la maſſe antérieure m', celle qui touche le petit corps, ſoit animée de la viteſſe $2u$ en avant, & de la viteſſe $-u$ en arriere, tandis que la maſſe poſtérieure m conſerve ſa viteſſe u. Il eſt évident que la maſſe m' animée de la viteſſe $-u$ doit faire équilibre à la maſſe égale m animée de la viteſſe u. Donc il ne reſtera que la maſſe m' animée de la viteſſe $2u$, laquelle fera équilibre (*Cas* 1.) à la maſſe du petit corps m animée de la viteſſe $2u$.

Dans ce ſecond Cas & dans les deux ſuivans, ainſi que dans les Corollaires qui en ſeront tirés, je ſuppoſe, afin que la démonſtration ne ſouffre aucune difficulté, que les corps ſoient deux parallélépipedes rectangles de baſes égales & ſemblables, & de différente longueur, qui ſe choquent par leurs baſes. On verra plus bas (*art.* 57) la démonſtration du Théorême pour des corps de figure quelconque.

Digitized by Google

TROISIEME CAS.

Si les deux masses sont entr'elles comme deux nombres rationnels quelconques; soient M, m, ces deux masses, V, u, leurs vitesses, μ la masse qui est la mesure commune des deux masses M, m, ν la vitesse qui est la mesure commune des deux vitesses V, u; on aura $m = \mu p$, $M = \mu P$; $u = \nu P$, $V = \nu p$, P, & p exprimant deux nombres entiers. Cela posé, on prouvera, comme on a fait dans le Cas précédent, qu'à chacune des masses animée de sa vitesse, on peut substituer un nombre $P \times p$ de masses μ animées de la vitesse ν, & qui par conséquent se feront équilibre de part & d'autre. Donc &c.

Avant que de passer au quatriéme Cas, nous observerons que dans les trois Cas précédens si $MV >$ ou $< mu$, il ne peut y avoir d'équilibre. Car supposons pour un moment que les corps M, m, se fassent équilibre en cet état; soient imaginés ces deux corps M, m, sur un plan, & soit supposé que ce plan soit mû en emportant les deux corps avec une vitesse x qui soit dans le sens de V ou dans un sens contraire, & qui soit telle que $MV \pm Mx = mu \mp mx$; il est visible que les corps M, m, ainsi emportés, se choqueront dans l'espace absolu avec des vitesses $V \pm x$, $u \mp x$ qui seront en raison inverse de leurs masses, & que par conséquent, suivant ce qui a été démontré ci-dessus, ils doivent rester en repos dans cet espace absolu. Cepen-

dant ils n'y resteroient pas, si comme on le suppose, ils se faisoient équilibre avec les seules viteſſes V & u. Car ces viteſſes V & u étant détruites, par l'hypotheſe, à la rencontre des deux corps, il leur reſteroit la viteſſe commune x avec laquelle rien ne les empêcheroit de ſe mouvoir.

Donc ſi deux maſſes commenſurables quelconques ſont en équilibre, & qu'on augmente ou qu'on diminue la viteſſe de l'une d'elles, l'équilibre ſera rompu. A plus forte raiſon le ſera-t-il ſi on augmente ou qu'on diminue à la fois la viteſſe & la maſſe d'un des corps.

Quatrieme Cas.

Suppoſons enfin que les maſſes M, m, ſoient incommenſurables, de maniere que $m = \mu p$ & $M = \mu P + \zeta$, P & p étant deux nombres entiers, & $\zeta < \mu$; je dis que ſi $m \times u = M \times V$, il y aura encore équilibre.

Car ſuppoſons qu'il n'y eût point équilibre, & qu'il fallût pour cela ajoûter ou retrancher de la maſſe M une quantité t; la maſſe $\mu P + \zeta \pm t$ animée de la viteſſe V, ſeroit donc en équilibre avec la maſſe m ou μp animée de la viteſſe u. Or la quantité t doit être néceſſairement plus petite que μ. Car ſi elle étoit plus grande, on auroit $\mu P + \zeta + t > \mu P + \mu$. De plus, cette derniere maſſe $\mu P + \mu$, animée de la viteſſe $\frac{m u}{\mu P + \mu}$, ſera équilibre à la maſſe m animée de la viteſſe u. Or

Digitized by Google

puiſque $\zeta < \mu$, on a $\frac{mu}{\mu P + \mu} < \frac{mu}{\mu P + \zeta}$, c'eſt-à-dire $< V$. Donc par la Remarque qui eſt à la fin du Cas précédent, la maſſe $\mu P + \zeta + t$ qu'on ſuppoſe plus grande que $\mu P + \mu$, étant animée de la viteſſe V plus grande que $\frac{mu}{\mu P + \mu}$ ne ſauroit être en équilibre avec la maſſe m animée de la viteſſe u. Donc t doit néceſſairement être $< \mu$, & comme μ peut être auſſi petit qu'on voudra, il s'enſuit que $t = o$. Donc &c.

Si la quantité t étoit une quantité qu'il fallût retrancher, on auroit en ſuppoſant $t > \mu$, $\mu P + \zeta - t < \mu P$ & $V < \frac{mu}{\mu P}$. Donc &c. *Ce qu'il falloit démontrer.*

Le produit de la maſſe d'un corps par ſa viteſſe eſt appellé *quantité de Mouvement.* De là naît cet axiome, que les corps qui ont des quantités de mouvement égales & directement oppoſées, ſe font équilibre.

REMARQUE.

47. On a démontré à la fin du troiſieme cas de l'article précédent, que quand les maſſes M, m ſont commenſurables, non-ſeulement il y a équilibre ſi $MV = mu$, mais qu'il n'y a point équilibre ſi MV n'eſt pas égal à mu. Il eſt aiſé d'appliquer la démonſtration qu'on en a donnée au cas des maſſes incommenſurables. D'où il réſulte que la *loi de l'équilibre eſt unique*, c'eſt-à-dire qu'il n'y a point d'équilibre &

Digitized by Google

qu'il ne ſauroit y en avoir dans un autre cas que dans celui des maſſes en raiſon inverſe des viteſſes, lorſque les corps tendent à ſe mouvoir dans des directions oppoſées.

COROLLAIRE I.

48. Si trois corps A, B, C, (Fig. 14) ſont attachés à une verge indéfinie MN, ou à un fil, & qu'ils reçoivent ſuivant AM, BM, CN des viteſſes telles que la ſomme des quantités de mouvement du corps A & du corps B, ſoit égale à celle du corps C ſeul, il y aura équilibre. Car on peut (*art.* 30) regarder la viteſſe du corps C comme compoſée de deux viteſſes quelconques, dont la ſomme ſoit égale à la viteſſe totale; & par conſéquent on peut conſidérer dans le corps C deux quantités de mouvement, dont l'une ſoit égale & contraire à celle de B, l'autre égale & contraire à celle de A. Donc &c.

Donc en général quel que ſoit le nombre des corps, *il y aura équilibre, quand la ſomme des quantités de mouvement de ceux qui tirent en un ſens, ſera égale à la ſomme des quantités de mouvement de ceux qui tirent en ſens contraire.*

COROLLAIRE II.

49. Suppoſons que trois corps B, C, F, (Fig. 15) attachés aux fils ou verges AB, AC, AF, ſoient en équilibre, & qu'on cherche le rapport des quantités de mouvement de ces trois corps entr'elles. On remarquera d'abord

Digitized by Google

d'abord que l'action des corps B & C sur le point A est la même, que si ces corps B & C étoient en A; on supposera que AH & AP soient entr'elles comme les vitesses des corps B & C; on décomposera chacune de ces vitesses AH, AP en deux autres AG, AN; & AQ, AL; dont les deux AG, AQ aient des directions contraires, & les deux autres AN, AL soient dirigées suivant FA prolongée.

Maintenant, puisqu'il y a équilibre, il s'ensuit que $B \times AG = C \times AQ$; de plus, la quantité de mouvement du corps F doit être égale à $B \times AN + C \times AL$. Or si par un point quelconque E de la ligne FA prolongée, on tire EK parallèle à AC, & ED parallèle à AB; je dis que les lignes AE, AD, AK feront entr'elles comme les quantités de mouvement des corps F, C, B; c'est-à-dire que $AE : \binom{AK}{AD} :: C \times AL + B \times AN : \binom{B \times AH}{C \times AP}$. Car

$$AE : \binom{AK}{AD} :: AO + AM : \binom{AK}{AD} :: \frac{AL \times OD}{PL} + \frac{AN \times KM}{AG} :$$

$$\left\{\begin{matrix} \frac{AH \times KM}{AG} \\ \frac{AP \times OD}{PL} \end{matrix}\right\} (\text{à cause de } OD = KM) :: \frac{AL}{PL} + \frac{AN}{AG} :$$

$$\left\{\begin{matrix} \frac{AH}{AG} \\ \frac{AP}{PL} \end{matrix}\right\} (\text{mettant pour } AG \text{ \& } PL \text{ leurs proportionnelles}$$

C & B) $:: AL \times C + AN \times B : \left(\frac{AH \times B}{AP \times C}\right)$. *Ce qu'il falloit démontrer.*

Digitized by Google

COROLLAIRE III.

50. Tout ce que nous venons de dire sur l'équilibre dans les propositions précédentes, sera vrai encore, si au lieu des vitesses finies imprimées aux corps qui sont en équilibre, on leur suppose des forces accélératrices qui soient entr'elles comme étoient ces vitesses finies, ou, suivant les définitions données *art.* 22, des forces motrices qui soient entr'elles comme étoient leurs quantités de mouvement. L'équilibre subsistera encore, il ne faudra que se servir pour la démonstration, du Corollaire II. Chapitre II. au lieu du Corollaire I. du même Chapitre.

REMARQUE.

Sur l'usage du mot de Puissances *dans la Statique.*

51. Les puissances ou causes qui meuvent les corps, ne peuvent agir les unes sur les autres que par l'entremise des corps mêmes qu'elles tendent à mouvoir. D'où il s'ensuit que l'action mutuelle de ces puissances, n'est autre chose que l'action même des corps animés par les vitesses qu'elles leur donnent. On ne doit donc entendre par l'action des puissances, & par le terme même de *puissances* dont on se sert communément dans la Statique, que le produit d'un corps par sa vitesse ou par sa force accélératrice. De cette définition, & des articles précédens, on conclut aisément que deux puissances égales & directement opposées se font équilibre; que deux puis-

Digitized by Google

ſances qui agiſſent en même ſens produiſent le même effet que leur ſomme; que ſi trois puiſſances agiſſant ſur un point commun ſont en équilibre, & qu'on faſſe ſur les directions de deux de ces puiſſances un parallélogramme, la diagonale de ce parallélogramme ſera dans la direction prolongée de la troiſiéme puiſſance, & que les rapports des trois puiſſances ſeront ceux de la diagonale aux côtés &c, & pluſieurs autres Théorêmes ſemblables que l'on démontre dans la Statique, peut-être avec moins de préciſion que nous le faiſons ici, parce qu'on n'y donne pas communément une notion du mot de *puiſſance* auſſi nette que celle que nous venons de donner.

COROLLAIRE IV.

52. Suppoſons que deux puiſſances égales appliquées aux extrémités A, B (Fig. 16) d'une verge droite & inflexible AB, agiſſent en ſens contraires dans la direction de cette même verge, & ſe faſſent par conſéquent équilibre. Si on imagine une autre verge quelconque ACB, fixe même, ſi l'on veut, en un point quelconque C, il eſt évident que l'équilibre ſubſiſtera. De plus, ſi les puiſſances au lieu de demeurer appliquées en A & en B, étoient appliquées par tout où l'on voudroit dans AB prolongée vers A & vers B, il eſt clair que l'équilibre ſubſiſteroit encore. Donc ſi on ſuppoſe la verge AB anéantie, & que la ſeule verge ACB ſubſiſte, les puiſſances appliquées en A & en B étant égales & de directions contraires, ſe feront équilibre.

Digitized by Google

COROLLAIRE V.

Qui contient le principe du Levier.

53. Soient AH & BE les directions de deux puissances en équilibre sur le levier ACB, & que AH & BE soient entr'elles comme ces puissances; je décompose la puissance AH en deux autres, dont les directions AK & AG prolongées, passent, l'une par B, l'autre par C, & de même la puissance BE en deux autres, dont les directions BP & BF passent par A & par C. En menant les perpendiculaires CM, CV, CL, sur AH, BE, AB, j'ai (12) $AK = \frac{AH \times CM}{CL}$, & $BP = \frac{BE \times CV}{CL}$. Mais à cause de l'équilibre $AK = PB$. Donc $CM \times AH = BE \times CV$. Donc les puissances AH, BE sont entr'elles en raison inverse des distances de leurs directions au point fixe (13).

---

(12) $AK = \frac{AH \times CM}{CL}$; en effet les côtés AH, AK du triangle AKH doivent être entr'eux comme les sinus des angles AKH, AHK, ou de leurs égaux CAL, CAM, c'est-à-dire en prenant CA pour rayon, que $AH : AK :: CL : CM$.

(13) L'équation $CM \times AH = BE \times CV$ ou $CM \times AH - BE \times CV = 0$ fait voir que quand deux puissances sont en équilibre sur un levier, si on multiplie chaque puissance par sa distance à l'appui, la différence des produits doit être zéro. En général, pour que tant de puissances qu'on voudra dirigées dans un même plan se fassent équilibre, il faut que la somme des produits de chaque puissance par sa distance à l'appui, soit zéro, en prenant

Digitized by Google

COROLLAIRE VI.

54. Si le point *C* n'étoit pas fixe, alors il faudroit ſe ſervir du Corollaire II. ci-deſſus, pour ſavoir quelle puiſſance il faudroit appliquer en *C* pour réſiſter aux

---

avec des ſignes contraires celles qui agiſſent dans des ſens différens. Quoique cette propoſition ſoit démontrée dans tous les Livres de Statique, cependant comme nous en ferons uſage par la ſuite, & que nous voulons épargner au Lecteur la peine de recourir ailleurs, nous allons la démontrer ici pour trois puiſſances ſeulement, mais de maniere à faire voir que la démonſtration réuſſiroit de même pour un plus grand nombre.

Soit le levier *APLE* (Pl. V. fig. 4.) dont l'appui eſt en *L*, & aux trois points *A*, *P*, *E* ſoient appliquées trois puiſſances repréſentées par *AC*, *PQ*, *EH*. La force *PQ* peut ſe décompoſer en deux *PV*, *PR*, dont la premiere paſſe par l'appui, la ſeconde par le point *E*; cette ſeconde peut ſe décompoſer de nouveau en deux autres *EF*, *EI*, la premiere couchée ſur *AE*, la ſeconde dirigée à l'appui.

Les deux forces *AC* & *EH* peuvent chacune ſe décompoſer en deux, l'une dirigée à l'appui, l'autre couchée ſur la ligne *AE*. Cela poſé, les forces dirigées aux appuis y ſont détruites, il faut donc que les forces *AD*, *EF*, *EK* ſe détruiſent entr'elles, c'eſt-à-dire que $AD = KE - EF$.

Or 1°. $PQ : PR$ ou $EG :: LS : LM$, & $EG : EF :: LT : LS$; donc $PQ : EF :: LT : LM$, & par conſéquent $EF = \frac{PQ \times LM}{LT}$; 2°. $AC : AD :: LT : LN$, & $EH : EK :: LT : LO$; donc $AD = \frac{AC \times LN}{LT}$, & $EK = \frac{EH \times LO}{LT}$; donc l'équation $AD = KE - EF$ ſera $\frac{AC \times LN}{LT} = \frac{EH \times LO}{LT} - \frac{PQ \times LM}{LT}$, ou $AC \times LN + PQ \times LM - EH \times LO = 0$. *Ce qu'il falloit démontrer.*

En ſuivant la même méthode que dans les Corollaires V. & VI. on démontre de même, que les puiſſances appliquées en *A*, *P*, *E* agiſſent ſur l'appui *L*, comme ſi elles étoient immédiatement appliquées à ce point.

Digitized by Google

puiſſances AG, BF. Or comme les puiſſances AG, BF peuvent être regardées comme compoſées des puiſſances AH & Ak, BE & Bp, & que les puiſſances Ak, Bp ſont égales & ſe détruiſent, il s'enſuit que la puiſſance capable de faire équilibre aux puiſſances AG, BF, ſera la même que celle qu'on trouveroit, ſi au lieu de ces puiſſances AG, BF, on imaginoit les puiſſances AH, BE, appliquées en C avec leurs directions propres.

Remarque ſur le cas où le Levier eſt droit.

55. La démonſtration précédente du principe du levier, ſuppoſe que les lignes AC & CB faſſent un angle, & il ſemble par conſéquent qu'elle ne puiſſe s'appliquer au cas où le levier eſt droit, & les directions des puiſſances parallèles. Cependant comme la propoſition eſt vraye, quelque obtus que ſoit l'angle ACB; il eſt clair qu'elle doit être vraye encore, lorſque l'angle ACB eſt de 180 degrés. Voici, au reſte, une démonſtration plus rigoureuſe du cas dont il s'agit.

Soient AP, AR (Fig. 17) les bras de levier; PD, RS les directions des deux puiſſances, que je ſuppoſe en équilibre; il eſt évident en premier lieu, que ſi les bras de levier ſont égaux, les puiſſances P, R doivent être égales. Mais ſi les bras AP, AR ſont inégaux, alors ayant tiré à volonté la ligne AS, imaginons que cette ligne ſoit une verge inflexible, à l'extrémité S de laquelle ſoient appliquées deux puiſſances S, S', éga-

Digitized by Google

les & oppoſées, dans la même ligne que la puiſſance R: ſuppoſons de plus, que la ſeule puiſſance S' qui tire en embas, ſoit capable de faire équilibre avec la puiſſance P ſur le levier PAS. Il eſt conſtant que la puiſſance S oppoſée à celle-ci, doit faire équilibre à la puiſſance R; c'eſt-à-dire (*art.* 52) qu'elle doit lui être égale. Donc $R = S = (art.\ 53)\ \frac{P \times PA}{AR}$. Donc $R : P :: AP : AR$.

Ce qu'il falloit démontrer.

Je ne ſuis pas le ſeul qui aye déduit les propriétés du levier droit de celles du levier courbe. M. *Newton* en a uſé de la même maniere dans ſes *Principes*, quoiqu'il ait ſuivi une route différente de la nôtre, & il y a lieu de croire que ce grand Géometre ſentoit la difficulté qu'il y auroit eu à s'y prendre autrement. J'ai tiré les propriétés du levier courbe, de l'équilibre entre deux puiſſances égales & oppoſées en ligne droite; mais comme ces deux puiſſances diſparoiſſent dans le cas du levier droit, la démonſtration pour ce cas n'a pu être tirée qu'indirectement du cas général.

On peut démontrer les propriétés du levier droit, dont les puiſſances ſont parallèles, en imaginant toutes ces puiſſances réduites à une ſeule, dont la direction paſſe par le point d'appui: c'eſt ainſi que M. *Varignon* en a uſé dans ſa Mécanique. Cette Méthode entre pluſieurs avantages, a celui de l'élégance & de l'uniformité; mais n'a-t-elle point auſſi, comme les autres, le défaut d'être indirecte, & de n'être pas tirée des vrais principes

Digitized by Google

de l'équilibre ? Il faut imaginer que les directions des puiſſances prolongées concourent à l'infini, les réduire enſuite à une ſeule par la décompoſition, & démontrer que la direction de cette derniere paſſe par le point d'appui. Doit-on s'y prendre de cette maniere pour prouver l'équilibre de deux puiſſances égales, appliquées ſuivant des directions parallèles à des bras égaux de levier ? Il me ſemble que cet équilibre eſt auſſi ſimple & auſſi facile à concevoir, que celui de deux puiſſances oppoſées en ligne droite, ou d'une puiſſance retenue par un point fixe, & que nous n'avons aucun moyen direct de réduire l'un à l'autre : or ſi la Méthode de M. *Varignon* pour démontrer l'équilibre du levier eſt indirecte dans un cas, elle doit l'être auſſi néceſſairement dans l'application au cas général.

COROLLAIRE VII.

56. Toutes choſes demeurant les mêmes que dans la Remarque précédente ; ſi on ſuppoſe au lieu du point fixe A une puiſſance qui faſſe équilibre aux puiſſances P & R, il eſt évident que ſa direction ſera parallèle & contraire à celle de ces puiſſances, & qu'elle ſera égale à leur ſomme. Car en ſuppoſant qu'elle faſſe équilibre aux puiſſances P, S', elle ſera $= P + S'$ (14). Donc puiſque $S' = R$, elle ſera auſſi $= P + R$ (15).

(14) Car par le Corollaire VI. les puiſſances appliquées en P & en S' agiſſent ſur le point A comme ſi elles étoient appliquées en ce point ; or dans ce dernier cas, le point A ſeroit ſollicité avec une force $= P + S'$.

(15) De toute cette Théorie du levier, il eſt facile de conclure, que pour

REMARQUE

REMARQUE I.

57. Lorſqu'un corps ſe meut ou tend à ſe mouvoir ſuivant une direction quelconque, on peut imaginer ce corps comme compoſé d'une infinité de petits parallélépipedes rectangles d'une égale épaiſſeur, dont les côtés ſoient parallèles à la direction du corps; ces parallélépipedes ſe mouvront ou tendront à ſe mouvoir ſuivant leur longueur avec une viteſſe égale; & par le principe du levier, on pourra toujours réduire le mouvement de ce corps à celui d'un de ces parallélépipedes, qui auroit une viteſſe égale à la ſomme des viteſſes de chaque parallélépipede, c'eſt-à-dire égale à la viteſſe du corps multipliée par le nombre des parallélépipedes. Par là on voit aiſément comment l'équilibre de deux corps ſe réduit à celui de deux parallélépipedes à baſes égales; &

---

réduire à une ſeule force tant de puiſſances que l'on voudra, qui agiſſent ſuivant des directions parallèles & dans un même plan ſur un levier, il ſuffit de chercher ſur ce levier un point tel, qu'en y appliquant parallèlement à toutes ces puiſſances une force égale à leur ſomme (ſi elles tirent toutes dans le même ſens) ou égale à l'excès de la ſomme de celles qui tirent dans un ſens ſur la ſomme de celles qui tirent dans l'autre, la ſomme des produits de chaque puiſſance par ſa diſtance à un point pris à volonté dans le levier, ſoit égal au produit de cette puiſſance totale par ſa diſtance à ce même point.

En général, ſi tant de puiſſances parallèles qu'on voudra & perpendiculaires à un même plan ſont en équilibre, la ſomme des produits de ces puiſſances par leurs diſtances à un plan quelconque, ſitué comme on voudra, ſera toujours nulle. Ces deux propoſitions ſont aiſées à démontrer par le principe du levier, & ſe trouvent dans beaucoup d'ouvrages.

Digitized by Google

par conſéquent comment le Théorême de l'article 46 s'applique à des corps de figure quelconque.

REMARQUE II.

58. Soient deux lignes Ee, $Z\zeta$, (Pl. V. fig. 5.) perpendiculaires l'une à l'autre, & CE' perpendiculaire au plan de ces deux là; imaginons une puiſſance G parallèle à Ce, dont la diſtance au plan $EZ\zeta e$ ſoit ξ, & la diſtance au plan $E'Ce$, χ; une puiſſance F parallèle à $C\zeta$, dont la diſtance au plan $EZ\zeta e$ ſoit ζ, & la diſtance au plan $E'C\zeta$, θ; enfin une puiſſance Π parallèle à CE' dont la diſtance au plan $E'Ce$ ſoit μ, & la diſtance au plan $E'C\zeta$, ν: on peut reduire l'action de ces puiſſances à celle de trois autres; la premiere ſera égale & parallèle à la puiſſance G, & agira (Pl. V. fig. 6.) ſur un point Z' du plan $E'C\zeta$, tel que menant $Z'L$ parallèle à CE', on ait $Z'L = \xi - \frac{\Pi\nu}{G}$, & que $Z'L'$ parallèle à CZ ſoit égale à $\frac{F\theta}{G} - \chi$; la ſeconde puiſſance ſera dirigée ſuivant LZ' parallèlement à CE' dans le plan $E'CZ$, & ſera $= \Pi$; la troiſieme ſera dirigée parallèlement à $Z\zeta$ dans le même plan $E'CZ$, ſera égale à F, & agira à une diſtance de $Z\zeta$ qu'on trouvera facilement. Ces propoſitions peuvent ſe démontrer aiſément par les articles 20, 21, 22 de mes *Recherches ſur la préceſſion des Equinoxes* (16).

(16) Que la puiſſance G (Pl. V. fig. 5.) rencontre le plan $E'C\zeta$ au

Ce principe ſert à trouver la loi d'équilibre de tant de puiſſances qu'on voudra, qui agiſſent dans des plans & dans des directions quelconques. On décompoſera,

---

point Q, la puiſſance F le plan $E'Ce$ au point G, & ſoient tirées QP', QD parallèles à CE', $C\zeta$; GE', GR' parallèles à Ce, CE'; & enfin CQ qui rencontre en F la ligne $E'F$ parallèle à $C\zeta$. Au lieu de la puiſſance G, qui agit au point Q, on peut prendre deux puiſſances qui agiſſent l'une en C, l'autre en F, parallèlement à la puiſſance G, dont la ſomme ſoit $= G$, & qui ſoient entr'elles en raiſon de FQ à CQ, ou, ce qui revient au meme, qui ſoient à la puiſſance G, comme FQ & CQ ſont à CF, ou comme DE' & CD ſont à CE'; ainſi la puiſſance qui agit en C ſera $G - \frac{G\xi}{\zeta}$, & celle qui agit en F ſera $\frac{G\xi}{\zeta}$; mais cette derniere rencontrant néceſſairement en quelque point K la puiſſance F dirigée ſuivant GK, il naît du concours de ces deux forces une force dirigée ſuivant Kn, qui prolongée rencontre en N le plan $E'CZ$, & peut être cenſée agir au point N: or il eſt viſible en tirant NO', parallèle à FK, que le point N eſt ſollicité de la même maniere que ſi on lui appliquoit, ſuivant NF & NO', les forces qui agiſſoient tout-à-l'heure ſuivant GK & FK: nos deux forces ſont donc réduites à trois, dont l'une $= F$ agit ſuivant NF, la ſeconde $= G - \frac{G\xi}{\zeta}$ agit ſuivant Ce, la troiſieme $= \frac{G\xi}{\zeta}$ agit ſuivant NO' parallèle à Ce; mais ces deux dernieres peuvent, comme on l'a vû, ſe réduire à une ſeule égale à leur ſomme, & par conſéquent $= G$, qui paſſera par B, où QD rencontre CN: car $CB : CN :: CQ : QF :: \frac{G\xi}{\zeta} : G - \frac{G\xi}{\zeta}$, c'eſt-à-dire en raiſon inverſe des puiſſances appliquées en C & N. De plus, les deux forces ſuivant FK & GK, ayant produit une force dirigée ſuivant NKn, il eſt viſible que ſi on repréſente la pre-

ce qui eſt toujours poſſible, chacune de ces puiſſances en trois autres, parallèles aux lignes Ce, $C\zeta$, CE'; on nommera ces puiſſances G, F, Π, & il faudra pour

---

miere par FK, la ſeconde doit être repréſentée par FN, & qu'ainſi on a $F : \frac{G\xi}{\zeta} :: FN : FK$ ou GE' ou θ; donc $FN = \frac{F\theta\zeta}{G\xi}$; d'ailleurs les triangles CDQ, $CE'F$ donnent $E'F = \frac{\chi\zeta}{\xi}$, & par conſéquent $NE' = \frac{F\theta\zeta}{G\xi} - \frac{\chi\zeta}{\xi}$; donc $BD = \frac{F\theta}{G} - \chi$; donc les deux forces G & F ſont réduites à deux autres, qui ſont auſſi G & F, dont la premiere agit en B parallèlement à Ce à une diſtance de $CE' = \frac{F\theta}{G} - \chi$, & l'autre agit ſuivant NF dans le plan $E'C\zeta$ à la diſtance CE'.

Maintenant (Pl. V. fig. 6.) que V ſoit le point ou la puiſſance Π rencontre le plan $eC\zeta$. Soit tirée par le point B, où eſt actuellement appliquée la puiſſance G, la ligne BL parallèle à CE', on aura $BL = \xi$; ſoit tirée enſuite LV; la puiſſance appliquée en B peut ſe décompoſer en deux, l'une ſuivant BT prolongement de BD, l'autre ſuivant BK parallèle à LV, & qui rencontrera par conſéquent la direction VO de la puiſſance Π. Ayant tiré VR parallèle à Ce, les triangles ſemblables LRV, SBK donneront SK ou la force ſuivant $BT = \frac{G \times LR}{RV}$, & la force ſuivant $BK = \frac{G \times LV}{RV}$; mais cette derniere par ſon concours avec la force Π dirigée ſuivant VO produit une force, dont la direction prolongée OZ' rencontre BL en quelque point Z', & qu'on peut par conſéquent imaginer appliquée à ce point Z': or ſi on repréſente la force ſuivant BK par BO, la force ſuivant VO doit être repréſentée par $Z'B$, enſorte que $BZ' : BO :: \Pi : \frac{G \times LV}{RV}$; donc (à cauſe de $BO = LV$) on a $BZ' = \frac{\Pi \times RV}{G}$.

Digitized by Google

l'équilibre ; 1°. s'il n'y a pas de point fixe, que $\int G = 0$, $\int F = 0$, $\int \Pi = 0$; & que de plus $\int F\zeta - \Pi\mu = 0$, $\int G\xi - \Pi\nu = 0$, $\int F\theta - G\chi = 0$. 2°. S'il y a un point fixe, & que ce point fixe soit C (ce qu'on peut toujours supposer) il faudra seulement que les trois

---

Mais au lieu de la force suivant $Z'O$, on peut imaginer au point Z' les forces BO & $Z'B$ appliquées suivant des directions parallèles à BK & VO, ensorte que la force $Z'B$, ou Π agira suivant $Z'B$, & la force BO suivant $Z'Q$ parallèle à LV ; or cette derniere peut se décomposer en deux autres, l'une suivant $Z'M$ parallèle à Ce, & l'autre suivant $Z'N$ parallèle à $C\zeta$; & par la comparaison des triangles semblables $Z'NQ$, LRV on trouvera la force suivant $Z'M = G$, & la force suivant $Z'N = \frac{G \times LR}{RV}$. Voilà donc nos trois forces réduites à cinq, la premiere $= G$ qui agit en Z' perpendiculairement au plan $E'CZ$ à une distance $Z'L$ de $CZ = BL - BZ' = \xi - \frac{\Pi\nu}{G}$; la seconde $= \frac{G \times LR}{RV}$, qu'on peut considérer comme appliquée en Z' & agissant suivant $Z'L'$; la troisieme $= \frac{G \times LR}{RV}$ qu'on peut considérer comme appliquée en D & agissant suivant DB ; la quatrieme $= F$, qui agit suivant $E'F$; la cinquieme enfin $= \Pi$, qui agit suivant $Z'B$ ou LB, à la distance $CL = BD = \frac{F\theta}{G} - \chi$; mais les forces appliquées en L', D, E' étant parallèles se reduisent à une seule $= \frac{G \times LR}{RV} - \frac{G \times LR}{RV} + F$, c'est-à-dire $= F$, & dont la distance CX à C doit être telle que $\frac{G \times LR}{RV} \times CL' - \frac{G \times LR}{RV} \times CD + F \times CE' = F \times CX$; d'où l'on tire $CX = \zeta - \frac{\pi}{F}\left(\mu + \frac{F\theta}{G} - \chi\right)$.

Digitized by Google

dernieres équations ayent lieu chacune en particulier.

Pour démontrer ces trois dernieres équations, les ſeules qui en ayent beſoin, on conſidérera que les puiſſances G étant perpendiculaires au plan $E'Z\zeta$, & les autres puiſſances étant dans ce même plan, les puiſſances G doivent ſeules & indépendamment des autres être en équilibre; donc non-ſeulement la ſomme de ces puiſſances doit-être $= o$, mais encore la ſomme de leurs momens par rapport aux lignes CL, CL'. Donc $\int G \times \left(\xi - \frac{\Pi \nu}{G}\right) = o$, & $\int G \left(\frac{F\theta}{G} - \chi\right) = o$. Donc $\int G\xi - \Pi\nu = o$, & $\int F\theta - G\chi = o$. De même, en rapportant la puiſſance F perpendiculairement au plan $E'Ce$, comme on a rapporté la puiſſance G perpendiculairement au plan $E'Z\zeta$, on trouvera $\int F\zeta - \Pi\mu = o$, $\int G\chi - F\theta = o$; & pour la puiſſance Π, rapportée perpendiculairement au plan $Ze\zeta$, on aura $\int \Pi\nu - G\xi = o$, $\int F\zeta - \Pi\mu = o$. Or ces ſix équations ſe réduiſent aux trois que nous avons données.

Il eſt bon de remarquer que les équations $\int G = o$, $\int G\left(\xi - \frac{\Pi\nu}{G}\right) = o$, & $\int G\left(\frac{F\theta}{G} - \chi\right) = o$, ſont chacune néceſſaires pour qu'il y ait équilibre. Car ſoient par exemple trois puiſſances A, B, G, (Pl. V. fig. 7.) en équilibre & perpendiculaires au plan LCL'; il faut pour l'équilibre 1°. Que $A + B + G = o$. 2°. Que les points A, B, G, ſoient en ligne droite,

Digitized by Google

ce qui donne les deux équations $A \times AD + B \times BE + G \times GF = 0$, & $A \times AK + B \times BM + G \times GO = 0$. Si les points A, B, G n'étoient pas en ligne droite, que le point B, par exemple, fût en Q dans le prolongement de BE, la seconde équation auroit lieu, mais non la premiere; & il n'y auroit point équilibre.

Remarque III.

59. Je ne m'étendrai pas davantage sur les loix de l'équilibre dans cette premiere Partie. J'aurai occasion d'en parler encore dans la seconde Partie de cet Ouvrage. La loi générale de l'équilibre, est que les puissances soient entr'elles réciproquement comme les vitesses, estimées suivant la direction de ces puissances. C'est de cette loi générale, dont M. *Newton* fait mention en peu de mots au commencement de ses *Principes*, que dépend la démonstration de la conservation des forces vives, comme on le verra dans la seconde Partie de cet Ouvrage.

Pour ce qui concerne le détail des différentes Machines dont on fait mention d'ordinaire dans la Statique, comme la Poulie, le Treuil &c. je me contente, n'ayant là-dessus rien de nouveau à dire, de renvoyer mes Lecteurs aux Livres qui en traitent, & particuliérement à la Méchanique de M. *Camus*, de l'Académie Royale des Sciences, publiée il y a quelques années, & à l'Ouvrage de M. *Trabaud*, qui a pour titre : *Principes sur le Mouvement & l'Equilibre;* Ouvrages où cette matière est traitée avec exactitude & avec clarté.

Digitized by Google

SECONDE PARTIE.

Principe général pour trouver le Mouvement de pluſieurs Corps qui agiſſent les uns ſur les autres d'une maniere quelconque; avec pluſieurs applications de ce Principe (*).

CHAPITRE PREMIER.

Expoſition du Principe.

LEs Corps n'agiſſent les uns ſur les autres que de trois manieres différentes qui nous ſoient connues : ou par impulſion immédiate, comme dans le choc ordinaire ; ou par le moyen de quelque corps interpoſé entr'eux, & auquel ils ſont attachés ; ou enfin par une vertu d'attraction réciproque, comme font dans le ſyſtê-

(*) Ce principe & la plûpart des Problèmes ſuivans, étoient contenus dans un Mémoire que j'ai lû à l'Académie ſur la fin de 1742, quoique la premiere Edition de ce Traité n'ait parû qu'en 1743. Le même jour où je commençai la lecture de mon Mémoire, M. Clairaut en préſenta un, qui avoit pour titre, *Sur quelques Principes qui facilitent la ſolution d'un grand nombre de Problèmes de Dynamique ;* ce Mémoire imprimé dans le Volume de 1742, a été lû après le mien, avec lequel il n'a d'ailleurs rien de commun.

me

Digitized by Google

me Newtonien le Soleil & les Planetes. Les effets de cette derniere eſpece d'action ayant été ſuffiſamment examinés, je me bornerai à traiter ici du mouvement des corps qui ſe choquent d'une maniere quelconque, ou de ceux qui ſe tirent par des fils ou des verges inflexibles. Je m'arrêterai d'autant plus volontiers ſur ce ſujet, que les plus grands Géometres n'ont réſolu juſqu'à préſent (en 1742) qu'un très-petit nombre de Problêmes de ce genre, & que j'eſpere, par la Méthode générale que je vais donner, mettre tous ceux qui ſont au fait du calcul & des principes de la Mécanique, en état de réſoudre les plus difficiles Problêmes de cette eſpece.

DÉFINITION.

J'appellerai dans la ſuite *Mouvement* d'un corps, la viteſſe de ce même corps conſidérée en ayant égard à ſa direction; & par *quantité de Mouvement*, j'entendrai à l'ordinaire le produit de la maſſe par la viteſſe.

PROBLÊME GÉNÉRAL.

60. *Soit donné un ſyſtême de corps diſpoſés les uns par rapport aux autres d'une maniere quelconque; & ſuppoſons qu'on imprime à chacun de ces Corps un Mouvement particulier, qu'il ne puiſſe ſuivre à cauſe de l'action des autres Corps; trouver le Mouvement que chaque Corps doit prendre.*

SOLUTION.

Soient *A*, *B*, *C*, &c. les corps qui compoſent le ſyſtê-

me, & suppoſons qu'on leur ait imprimé les mouvemens a, b, c, &c. qu'ils ſoient forcés, à cauſe de leur action mutuelle, de changer dans les mouvemens a, b, c, &c. Il eſt clair qu'on peut regarder le mouvement a imprimé au corps A comme compoſé du mouvement a, qu'il a pris, & d'un autre mouvement α; qu'on peut de même regarder les mouvemens b, c, &c. comme compoſés des mouvemens b, β; c, $\varkappa$; &c. d'où il s'enſuit que le mouvement des corps A, B, C, &c. entr'eux auroit été le même, ſi au lieu de leur donner les impulſions a, b, c, on leur eût donné à la fois les doubles impulſions a, α; b, β; c, $\varkappa$, &c. Or par la ſuppoſition, les corps A, B, C, &c. ont pris d'eux-mêmes les mouvemens a, b, c; &c. Donc les mouvemens $\alpha, \beta, \varkappa$ &c. doivent être tels qu'ils ne dérangent rien dans les mouvemens a, b, c, &c. c'eſt-à-dire que ſi les corps n'avoient reçû que les mouvemens $\alpha, \beta, \varkappa$ &c. ces mouvemens auroient dû ſe détruire mutuellement, & le ſyſtême demeurer en repos.

De là réſulte le principe ſuivant, pour trouver le mouvement de pluſieurs corps qui agiſſent les uns ſur les autres. *Décompoſés les mouvemens a, b, c, &c. imprimés à chaque corps, chacun en deux autres* a, α; b, β; c, $\varkappa$; &c. *qui ſoient tels, que ſi l'on n'eût imprimé aux corps que les mouvemens* a, b, c &c. *ils euſſent pû conſerver ces mouvemens ſans ſe nuire réciproquement; & que ſi on ne leur eût imprimé que les mouvemens $\alpha, \beta, \varkappa$, &c. le ſyſtême fût demeuré en repos;* il eſt clair que a, b, c ſeront

les mouvemens que ces corps prendront en vertu de leur action. *Ce qu'il falloit trouver.*

COROLLAIRE.

61. Lorſqu'un des mouvemens imprimés eſt = o, il eſt viſible que les mouvemens dans leſquels on le décompoſe ſont des mouvemens égaux & contraires. Par exemple ſi a eſt = o, on aura le mouvement α = & de direction contraire au mouvement a : en effet a eſt dans tous les cas la diagonale d'un parallélogramme dont a & α ſont les côtés; or quand la diagonale eſt = o, les côtés ſont égaux & directement oppoſés. Donc &c.

CHAPITRE II.

Propriétés du centre de gravité commun de pluſieurs Corps, déduites du Principe précédent.

DÉFINITION I.

J'APPELLERAI dans la ſuite *centre de gravité* de deux corps, un point pris dans la ligne droite qui joint ces corps, & dont les diſtances à chacun de ces corps, ſoient en raiſon inverſe de leurs maſſes; & en général, j'entendrai toujours par le mot de *centre de gravité de pluſieurs corps*, ce qu'on entend d'ordinaire par ce mot en Mécanique, c'eſt-à-dire un point tel, que ſi on fait

Digitized by Google

paſſer par ce point un plan de poſition quelconque, la ſomme des produits des maſſes qui ſe trouveront d'un côté de ce plan, multipliées chacune par ſa diſtance à ce même plan, ſoit égale à la ſomme des produits des maſſes qui ſe trouveront de l'autre côté, multipliées de même chacune par ſa diſtance au plan.

SCOLIE.

62. Lorſque les peſanteurs des corps ſont comme leurs maſſes, le centre de gravité, tel que nous venons de le définir, eſt auſſi le point par lequel le ſyſtême devroit être ſuſpendu pour reſter en équilibre, ſi tous les corps étoient unis l'un à l'autre par des leviers inflexibles. Il n'en eſt pas de même, lorſque les forces motrices ou peſanteurs des corps ne ſont pas comme leurs maſſes. Ce que nous appellons ici *centre de gravité*, devroit plutôt s'appeller alors *centre de maſſes* (*). Nous nous ſervirons cependant du terme de *centre de gravité*, pour nous conformer à l'uſage reçû.

DÉFINITION II.

Lorſque pluſieurs puiſſances agiſſent enſemble, j'appellerai *force réſultante du concours d'action de ces puiſſances*, ou ſimplement *force réſultante de ces puiſſances*, une puiſſance égale & directement oppoſée à celle qui ſeroit capable de leur faire équilibre.

(*) Ce terme de *centre de maſſes* a été employé par M. *Daniel Bernoulli*; Traité du flux & reflux, Chap. III. §. III.

Digitized by Google

Ainſi, par exemple, ſi AM (Fig. 17) eſt la direction de la puiſſance qui fait équilibre aux puiſſances P, R ſur le levier PAR, AN ſera la direction de la force réſultante des puiſſances P, R, & cette force réſultante ſera égale à la force ſuivant AM.

COROLLAIRE.

63. Si pluſieurs puiſſances ſe font équilibre d'une maniere quelconque, la force réſultante ſera nulle, s'il n'y a pas de point fixe; & s'il y en a un, la direction de la force réſultante paſſera par le point fixe.

Car *dans le premier Cas*, puiſque toutes les puiſſances ſe font équilibre par elles-mêmes les unes aux autres, la puiſſance capable de faire ſeule équilibre à toutes ces puiſſances eſt donc zéro, & par conſéquent auſſi (*déf. précéd.*) la force réſultante.

Dans le ſecond Cas, il eſt viſible que le point fixe fait l'effet d'une puiſſance qui ſoutient l'effort de toutes les autres; donc ſi on détruit le point fixe, & qu'on cherche une puiſſance capable de faire équilibre à toutes les puiſſances données, la direction de cette puiſſance paſſera néceſſairement par le point fixe. Donc la direction de la force réſultante y paſſera auſſi.

J'entends au reſte ici, & j'entendrai dans les Lemmes ſuivans par le mot de point fixe, *non-ſeulement un point Mathématique* (*comme l'appui d'un levier, le point de ſuſpenſion d'une verge ou d'un fil*); *mais en général tout*

Digitized by Google

obſtacle inſurmontable, qui par ſa réſiſtance ſoit capable de détruire l'effet commun des puiſſances, & de produire l'équilibre entr'elles.

LEMME I.

64. *Si tant de corps qu'on voudra ſe meuvent uniformément ſuivant des directions parallèles, dans le même plan ou dans des plans différens; la direction de leur centre de gravité commun ſera parallèle aux directions de ces corps, & ſa viteſſe ſera égale à la ſomme des quantités de mouvement de chaque corps, diviſée par la ſomme des maſſes.* Cette propoſition eſt démontrée dans pluſieurs Ouvrages, & elle ſe déduit fort aiſément du principe du levier.

LEMME II.

65. *Soient ſur un même plan trois corps* A, *a*, *α*, (Fig. 18) *ou en général tant de corps qu'on voudra, &* G *leur centre de gravité. Soit* G M *la ligne droite parcourue par le centre de gravité de ces corps, dans le tems qu'ils parcourent uniformément les lignes quelconques* A C, *a c*, *α γ. Je dis, que ſi on décompoſe les viteſſes* A C, *a c*, *α γ*, *chacune en deux autres* A B, A D; *a b*, *a d*; *α ζ*, *α δ*; *telles que les lignes* A B, *a b*, *α ζ ſoient parallèles entr'elles auſſi-bien que les lignes* B C, *b c*, *ζ γ*; *& qu'on cherche la ligne* G N *que parcourroit le centre de gravité* G, *ſi les corps* A, *a*, *α*, *avoient les viteſſes & les directions* A B, *a b*, *α ζ*, *& de même la ligne* G O *que parcourroit ce même centre, ſi les corps* A, *a*, *α*, *avoient les*

Digitized by Google

viteſſes & les directions A D, a d, α δ : *la diagonale du parallélogramme fait ſur les lignes* G N, G O, *ſera la ligne même* G M *que parcourt le centre, lorſque les corps* A, a, α, *ont les viteſſes & les directions* A C, a c, α κ.

Car ſuppoſons que lorſque les corps *A*, *a*, *α*, ſont parvenus en *B*, *b*, *ζ*, & que par conſéquent (*hyp.*) le centre *G* eſt en *N*, on leur donne ſuivant *BC*, *bc*, *ζκ*, des viteſſes égales & parallèles aux viteſſes ſuivant *AD*, *ad*, *αδ*; il eſt clair qu'ils arriveront aux points *C*, *c*, *κ* des lignes *AC*, *ac*, *ακ*. Or, par la ſuppoſition, lorſque les corps *A*, *a*, *α* ſont en *C*, *c*, *κ*, le centre *G* eſt en *M*; donc tandis que les corps *A*, *a*, *α*, parcourent les lignes *BC*, *bc*, *ζκ*, le centre de gravité parcourra la ligne *NM*. Cette ligne *NM* ſera (*Lem. I.*) parallèle aux lignes *BC*, *bc*, *ζκ*, & $= \frac{A.BC + a.bc + \alpha.\zeta\kappa}{A + a + \alpha}$. Mais la ligne *GO* que parcourroit le centre de gravité *G*, tandis que les corps *A*, *a*, *α*, décriroient les lignes *AD*, *ad*, *αδ*, parallèles & égales à *BC*, *bc*, *ζκ*, cette ligne *GO*, dis-je, ſeroit parallèle aux lignes *AD*, *ad*, *αδ*, & ſeroit $= \frac{A.AD + a.ad + \alpha.\alpha\delta}{A + a + \alpha} = \frac{A.BC + a.bc + \alpha.\zeta\kappa}{A + a + \alpha} = NM.$

Donc la ligne *GO* eſt égale & parallèle à *NM*: donc *MG* eſt la diagonale du parallélogramme fait ſur les côtés *NG*, *GO*. *Ce qu'il falloit démontrer.*

SCOLIE.

66. Il eſt viſible que cette démonſtration peut s'éten-

Digitized by Google

dre à tel nombre de corps qu'on voudra, & qu'ainſi la propoſition eſt générale.

LEMME III.

67. *Si* G M (Fig. 18 & 19) *eſt la ligne parcourue par le centre de gravité* G *des corps* A, *a*, *α*, *tandis que ces corps décrivent uniformément les lignes quelconques* A C, *a c*, *α κ*; *& qu'ayant tranſporté ces corps en d'autres endroits* F, f, *φ du même plan, de maniere qu'ils ſoient diſpoſés l'un par rapport à l'autre comme on voudra, & que γ ſoit leur centre de gravité, on ſuppoſe qu'ils décrivent les lignes* F H, f h, *φ ν, égales & parallèles à* A C, a c, *α κ, chacune à ſa correſpondante: je dis que la ligne γ μ décrite par le centre de gravité, ſera égale & parallèle à* G M.

Car ſoient *F L*, *f l*, *φ λ* égales & parallèles à *A B*, *a b*, *α ζ*; *F P*, *f p*, *φ π*, égales & parallèles à *A D*, *a d*, *α δ*, chacune à ſa correſpondante; *γ ν* le chemin du centre *γ*, lorſque les corps décrivent les lignes *F L*, *f l*, *φ λ*; *γ ω* le chemin du même centre, lorſqu'ils décrivent *F P*, *f p*, *φ π*. Il eſt clair que *γ ν* ſera égale & parallèle à *G N*, & *γ ω* égale & parallèle à *G O*. Donc *γ μ* ſera auſſi égale & parallèle à *G M*: mais (*Lem. préced.*) ces deux lignes ſont celles que décrivent les centres de gravité *G*, *γ*, quand les corps *A*, *a*, *α* & *F*, *f*, *φ* parcourent les lignes *A C*, *a c*, *α κ*, & *F H*, *f h*, *φ ν*. Donc &c. *Ce qu'il falloit démontrer.*

LEMME

LEMME IV.

68. *Les mêmes choſes étant ſuppoſées que dans le* Lem. II. *ci-deſſus, avec cette différence que* A B, *a* b, *α* C, *&* A D, *a* d, *α* ♂, (Fig. 20) *ne ſoient point parallèles : ſi* G M *eſt le chemin du centre de gravité, lorſque les corps* A, *a*, *α*, *décrivent uniformément les lignes* A C, *a c*, *α* ϰ; G N *le chemin de ce même centre, lorſque ces corps décrivent les lignes* A B, *a* b, *α* C; *&* G O *le chemin du centre, lorſque les corps* A, *a*, *α*, *décrivent les lignes* A D, *a* d, *α* ♂; *je dis que* G M *ſera la diagonale du parallélogramme fait ſur les côtés* G N, G O.

Car l'on prouvera comme dans le *Lem. II.* que *N M* eſt le chemin du centre, lorſque les corps *A*, *α*, *α*, décrivent les lignes *B C*, *b c*, C ϰ. Mais à cauſe que *A D a d*, *α* ♂ ſont égales & parallèles à *B C*, *b c*, C ϰ, chacune à chacune; il s'enſuit (*Lem. III.*) que *G O* eſt égale & parallèle à *N M*. Donc &c.

COROLLAIRE I.

69. Si on avoit décompoſé les mouvemens *A C*, *a c*, *α* ϰ chacun en trois autres quelconques, ou en général en tant d'autres qu'on eût voulu, le chemin *G M* du centre de gravité auroit toujours été la derniere diagonale des parallélogrammes, qui auroient eu pour côtés les lignes particulieres que le centre de gravité auroit parcourues, ſi les corps *A*, *a*, *α*, avoient eu ſéparément

Digitized by Google

& succeſſivement chacun des mouvemens compoſans. Cela eſt clair par le Lemme précédent.

Corollaire II.

70. La même propoſition ſeroit encore vraie, ſi les mouvemens compoſans n'étoient pas en nombre égal dans tous les corps; par exemple, ſi le mouvement de l'un étoit décompoſé en trois, le mouvement d'un autre en deux, &c. Car le Lemme précédent n'en ſeroit pas moins véritable, quand on ſuppoſeroit par exemple $AD = 0$, c'eſt-à-dire que le mouvement AC n'eût point été décompoſé.

Lemme V.

71. *Si tant de corps* A, B, C, &c. *qu'on voudra ſont liés ou joints enſemble d'une maniere quelconque, ſans néanmoins qu'il y ait dans le ſyſtême aucun point fixe; & qu'on leur imprime les mouvemens* M, N, P, &c. *tels qu'en vertu de ces mouvemens ils ſoient en équilibre; je dis que ſi les corps* A, B, C, &c. *pouvoient ſuivre librement les mouvemens* M, N, P, &c. *le centre de gravité demeureroit en repos.*

Car ſi on décompoſe les mouvemens M, N, P, &c. chacun en deux autres m, μ; n, ν; p, π; &c. parallèles à deux lignes données de poſition quelconque, que j'appelle K & Q; il faudra pour trouver le chemin du centre de gravité en vertu des mouvemens M, N, P, &c. chercher le chemin de ce même centre en vertu des

mouvemens m, n, p &c. qui ſera (*Lem. I.*) parallèle à K, & $= \frac{A.m + B.n + C.p + \&c.}{A + B + C.\&c.}$; & le chemin de ce même centre en vertu des mouvemens μ, ν, π &c. qui ſera parallèle à Q, & $= \frac{A.\mu + B.\nu + C.\pi + \&c.}{A + B + C\ \&c.}$. La diagonale du parallélogramme fait ſur ces deux lignes, ſera (*Lem. II.*) le chemin du centre de gravité. Il faut donc prouver que chacune de ces deux lignes ſera zéro, pour faire voir que le chemin du centre de gravité eſt $= 0$, ou, ce qui eſt la même choſe, il faut démontrer que $A.m + B.n + C.p + \&c. = 0$, & $A.\mu + B.\nu + C.\pi + \&c. = 0$.

Or puiſque (*hyp.*) les corps A, B, C, &c. animés des mouvemens M, N, P, &c. ſont en équilibre, & qu'il n'y a dans le ſyſtême aucun point fixe, la force réſultante des puiſſances $A.M, B.N, C.P$ &c. ſera $= 0$ (*art. 63*). Or comme les puiſſances $A.M, B.N, C.P$ &c. ſe décompoſent dans les puiſſances $A.m$, $A.\mu$; $B.n$, $B.\nu$; $C.p$, $C.\pi$; &c. la force réſultante de ces puiſſances eſt celle qui provient de la force réſultante des puiſſances $A.m, B.n, C.p$ &c. & de la force réſultante des puiſſances $A.\mu, B.\nu, C.\pi$ &c. Mais ces deux dernieres forces réſultantes ſont parallèles à deux lignes différentes K & Q. Donc pour que la force qui en provient ſoit zéro, chacune en particulier doit être $= 0$. Or la premiere eſt $A.m + B.n + C.p +$ &c. la ſeconde $A.\mu + B.\nu + C.\pi +$ &c. Donc cha-

cune de ces deux quantités eſt = o. *Ce qu'il falloit démontrer.*

LEMME VI.

72. *Les mêmes choſes étant ſuppoſées que dans le Corollaire précédent, ſi ce n'eſt que les mouvemens* M, N, P, &c. *ſoient quelconques, c'eſt-à-dire tels que les corps* A, B, C, &c. *animés de ces mouvemens, ſe faſſent équilibre ou non, & qu'il y ait de plus, ſi l'on veut, un point fixe dans le ſyſtéme : je dis que ſi l'on ſuppoſoit que les corps* A, B, C, &c. *ſuiviſſent les mouvemens* M, N, P &c, *abſtraction faite de leur action mutuelle, le chemin du centre de gravité ſeroit parallèle à la direction de la force réſultante des puiſſances* A.M, B.N, C.P; &c.

Car pour avoir la direction de cette force, il faut (les mêmes choſes étant poſées que dans la démonſtration du Lemme précédent) tirer la diagonale d'un parallélogramme dont les côtés, parallèles à K & à Q, ſoient entr'eux comme $A.m + B.n + C.p + \&c.$ à $A.\mu + B.\nu + C.\pi + \&c.$ Mais pour avoir le chemin du centre de gravité en vertu des mouvemens M, N, P, *&c.* il faut (*Lem. II.*) tirer la diagonale d'un parallélogramme dont les côtés, parallèles à K & à Q, ſoient entr'eux comme $\frac{A.m + B.n + C.p + \&c.}{A + B + C + \&c.}$ à $\frac{A.\mu + B.\nu + C.\pi + \&c.}{A + B + C + \&c.}$; donc les côtés de ces deux parallélogrammes ſeront parallèles chacun à ſon correſ-

Digitized by Google

pondant, & ſeront l'un à l'autre dans le même rapport. Donc les diagonales ſeront parallèles. Donc &c. *Ce qu'il falloit démontrer.*

COROLLAIRE.

73. Si les corps A, B, C, &c. avoient les mouvemens $-M$, $-N$, $-P$, &c. le chemin du centre de gravité ſeroit parallèle à la direction de la force réſultante, mais en ſens contraire.

SCOLIE I.

74. Tous les Lemmes démontrés ci-deſſus ſont encore vrais, lorſque les corps ſont ſuppoſés dans des plans différens. Car 1°. le Lemme I. eſt vrai dans ce cas comme dans les autres. 2°. La démonſtration du Lemme II. ne ſuppoſe pas à la rigueur que les corps A, a, α, ſoient dans le même plan; elle ſuppoſe ſeulement que les mouvemens AC, ac, αx puiſſent ſe décompoſer chacun en deux autres parallèles à deux lignes données. D'où il s'enſuit que le Lemme III. ſera vrai, lors même que les corps ſont dans des plans différens, au moins dans la ſuppoſition que les mouvemens imprimés à chaque corps puiſſent ſe décompoſer chacun en deux autres parallèles à deux lignes données de poſition. Or lorſque les corps ſont dans des plans différens, on peut décompoſer les mouvemens imprimés, chacun en deux autres, dont l'un ſoit parallèle à une ligne donnée de poſition, & dont le ſecond puiſſe auſſi ſe décompoſer en deux autres paral-

Digitized by Google

lèles chacun à deux autres lignes données de position. D'où il s'enſuit que le Lemme III. eſt vrai dans tous les cas, & qu'ainſi les Lemmes IV. V. & VI. qui ne ſont appuyés que ſur les trois premiers, & qui ne demandent point que les corps ſoient dans un même plan, ſont auſſi vrais dans tous les cas.

Au reſte, nous avons ſuppoſé dans les Lemmes précédens, la propoſition démontrée par M. *Newton*, que le centre de gravité de pluſieurs corps qui ſe meuvent uniformément & en ligne droite, ſans agir les uns ſur les autres, ſe meut auſſi uniformément & en ligne droite. Cependant il eſt facile de voir que par la Méthode de la décompoſition des mouvemens en d'autres, parallèles à des lignes données, on pourroit auſſi démontrer très-facilement cette propoſition. Ainſi notre Méthode a cet avantage, qu'on peut s'en ſervir pour démontrer que le centre de gravité de pluſieurs corps, ſe meut uniformément & en ligne droite, ſoit que ces corps agiſſent, ſoit qu'ils n'agiſſent pas les uns ſur les autres.

SCOLIE II.

75. Ajoûtons que ſi pluſieurs corps, conſidérés comme des points, ſe meuvent en ligne droite, dans un milieu réſiſtant en raiſon de la viteſſe, leur centre de gravité ſe mouvra auſſi en ligne droite, avec un mouvement retardé en raiſon de la viteſſe. En effet quand la réſiſtance eſt comme la viteſſe, les eſpaces que les corps décriroient à chaque inſtant, ſont diminués dans

Digitized by Google

la raiſon de ces mêmes eſpaces. Donc le chemin du centre de gravité continue d'être en ligne droite, & l'eſpace qu'il parcourt eſt ſeulement diminué à chaque inſtant d'une quantité qui lui eſt proportionnelle. Donc &c.

THÉORÈME I.

76. *L'état de Mouvement ou de repos du centre de gravité de pluſieurs Corps, ne change point par l'action mutuelle de ces corps entr'eux, pourvû que le ſyſtême ſoit entierement libre, c'eſt-à-dire qu'il ne ſoit point aſſujetti à ſe mouvoir autour d'un point fixe.*

Car (*art.* 60) les mouvemens a, b, c *&c.* étant compoſés des mouvemens a, α; b, β; $c, \varkappa$; &c. les mouvemens a, b, c, &c. peuvent être regardés comme compoſés des mouvemens $a, -\alpha$; $b, -\beta$; $c, -\varkappa$; *&c*; d'où il s'enſuit que le chemin du centre de gravité quand les corps ſont animés des mouvemens a, b, c, &c. eſt le même (*Lem. IV.*) que ſi on les ſuppoſoit animés d'abord des mouvemens a, b, c, *&c.* & enſuite des mouvemens $-\alpha, -\beta, -\varkappa$ *&c.* Or puiſque par l'hypotheſe, il n'y a dans le ſyſtême aucun point fixe, & que le ſyſtême demeureroit en repos, ſi les corps n'avoient reçû que les mouvemens $\alpha, \beta, \varkappa$, *&c.* Il s'enſuit (*Lem. V.* & *Coroll. Lem. VI.*) qu'en vertu des mouvemens $-\alpha, -\beta, -\varkappa$, *&c.* le chemin du centre de gravité eſt zéro. Donc le chemin du centre de gravité eſt le même quand les corps ont les mouvemens a, b, c, &c. que s'ils ſuivoient les mouvemens a, b, c, *&c.* qu'on leur a imprimés.

Digitized by Google

REMARQUE.

77. S'il y a dans le ſyſtême quelque point fixe, alors les corps animés des mouvemens α, ζ, $\varkappa$, &c. peuvent ſe faire équilibre, ſans que la force réſultante de ces mouvemens ſoit zéro : il ſuffit que la direction de la force réſultante de ces mouvemens paſſe par le point fixe. Dans ce cas, le chemin du centre de gravité en vertu des mouvemens $-\alpha$, $-\zeta$, $-\varkappa$ &c. ſera (*Coroll. Lem. VI.*) parallèle à la direction de cette force & en ſens contraire, & par conſéquent ne ſera point $= o$. Donc alors l'action mutuelle des corps changera l'état du centre de gravité.

THÉORÊME II.

78. *Les mêmes choſes étant ſuppoſées que dans le Théorême I. ; ſi la peſanteur ou une force accélératrice, conſtante pour chaque corps, & différente, ſi l'on veut, pour chacun d'eux, agit ſur ces corps ſuivant des lignes parallèles, le centre de gravité ou plutôt le centre de maſſes commun décrira la même courbe qu'il auroit décrite, ſi ces corps euſſent été libres.*

Pour le démontrer, ne prenons que deux corps A, B, (Fig. 21) & ſuppoſons que $A\alpha$, $B\zeta$, ſoient les petites lignes qu'ils parcourroient naturellement en vertu des viteſſes primitivement imprimées Aa, Bb, & de la force accélératrice ſuivant $\alpha\alpha$, $b\zeta$; ſoit C le centre de maſſes des corps A & B, c'eſt-à-dire un point dont les diſtances

distances aux points A & B soient en raison inverse des masses A & B, (& non pas des poids A & B qui peuvent ici n'être pas comme les masses); & que les corps A & B, au lieu de parcourir les lignes $A\alpha$, $B\zeta$, parcourent les lignes A a, B b; il est clair (*art.* 76) que le chemin Cx du centre de gravité au premier instant, sera le même que si les corps A & B eussent décrit les lignes $A\alpha$, $B\zeta$. Dans l'instant suivant, les corps tendent à décrire $a\varepsilon = A a$, & $b\delta = B b$, & le centre C tend à parcourir la droite $xK = Cx$, la même qu'il eût parcourue, si les corps eussent continué à se mouvoir suivant $A\alpha$, $B\zeta$; mais comme, en vertu de la force accélératrice, les corps A & B, décriroient les lignes parallèles ef, dg dans ce dernier cas, & dans l'autre cas les lignes $\varepsilon\varphi$, $\delta\gamma$ qui leur sont égales & parallèles chacune à chacune, il s'ensuit que le chemin xk du centre de masses sera le même, soit que les corps décrivent αf, ζg, soit qu'ils décrivent les lignes $a\varphi$, $b\gamma$. Mais quelque autre ligne que les corps A, B parcourent au lieu de $a\varphi$, $b\gamma$, à cause de leur action mutuelle, le chemin du centre C sera toujours le même (*Théor. I.*) Donc &c. On voit aisément que la démonstration s'étend au cas où il y auroit un plus grand nombre de corps. *Ce Q. F. D.*

Remarque I.

79. Cette démonstration n'auroit pas lieu, si la force accélératrice n'étoit pas constante pour chaque corps, & n'agissoit pas suivant des lignes parallèles. Car alors on

Digitized by Google

ne pourroit pas ſuppoſer ef égale & parallèle à ϕ ; dg égale & parallèle à γ ; & par conſéquent le chemin xk du centre ne ſeroit pas le même dans les deux cas.

REMARQUE II.

80. Il y a cependant un cas à excepter, c'eſt celui où la force accélératrice ſeroit dirigée vers un point fixe, & agiroit en raiſon de la diſtance. Car dans ce cas, comme il eſt aiſé de le prouver, & comme pluſieurs Géometres l'ont fait voir, le centre de gravité ſeroit le même que le centre de maſſes, & ce centre ſeroit attiré ou pouſſé vers le point fixe avec une force proportionnelle à la diſtance où il eſt de ce point. D'où il eſt aiſé de démontrer que le Théorême précédent aura encore lieu dans le cas dont il s'agit.

En effet, puiſque l'action mutuelle des corps ne change point l'état du centre de maſſes, qui eſt ici le même que le centre de gravité, le centre de gravité ſe trouvera donc à chaque inſtant à la même diſtance du point fixe où il auroit été ſans cette action. Donc il ſera attiré avec la même force. Sa viteſſe de projection eſt d'ailleurs la même dans les deux cas. Donc &c.

Ainſi dans ce dernier cas, ſuivant la Théorie connue des forces centrales, le centre de maſſes ou de gravité décrira une ellipſe dont le point fixe ſera le centre, ſoit que les corps agiſſent ou n'agiſſent pas les uns ſur les autres; & dans le cas du Théorême précédent, le centre de maſſes décrira une parabole.

Digitized by Google

COROLLAIRE.

81. Les deux Théorêmes précédens fourniſſent des moyens très-ſimples de trouver le mouvement des corps inflexibles. Nous pourrons en donner quelques uſages dans la ſuite.

SCOLIE.

82. Si on conſidere chaque corps comme un point, & qu'ils ſe meuvent dans un milieu réſiſtant en raiſon de la viteſſe, 1°. Le centre de maſſes ſe mouvra en ligne droite ſi les corps ne ſont animés par aucune force accélératrice; & il ſe mouvra d'un mouvement retardé en raiſon de la viteſſe, préciſément comme ſi les corps euſſent été libres. 2°. Le centre de gravité décrira la même ligne & avec la même loi de viteſſe, ſoit que les corps agiſſent ou n'agiſſent pas les uns ſur les autres, pourvû que la peſanteur des corps ſoit conſtante, ou dirigée vers un point fixe & proportionnelle à la diſtance. C'eſt une ſuite évidente des propoſitions démontrées ci-deſſus articles 75, 79 & 80.

THÉORÊME III.

83. *Si tant de corps qu'on voudra ſont liés enſemble d'une maniere quelconque, & qu'un ou pluſieurs de ces corps ſoient forcés de ſe mouvoir ſur un plan ou ſur des plans parallèles; je dis que le chemin du centre de gravité parallèlement à ces plans ſera uniforme.*

Digitized by Google

[*Ainſi, par exemple, & pour fixer l'imagination, ſi un corps* P, (Fig. 29) *forcé de ſe mouvoir dans la rainure droite* P S *dont il ne puiſſe ſortir, traîne après lui un autre corps* M *par le moyen d'une verge* P M, *le centre de gravité g de ces deux corps décrira une courbe telle, que les parties de la ligne* K S *répondantes aux arcs parcourus par le centre g en tems égaux, ſeront égales.*]

Car en général, ſi on réduit en une ſeule force tous les mouvemens perdus par ces corps à chaque inſtant, il eſt clair qu'à cauſe de l'équilibre de ces mouvemens, la direction de la force réſultante ſera néceſſairement perpendiculaire aux plans. Donc le centre de gravité ſera continuellement écarté de la ligne droite par une force dont la direction ſera (*Lem. VI.* & *art.* 77) perpendiculaire à ces plans, & dont par conſéquent l'action ſera toujours parallèle à une ligne donnée. Donc &c.

COROLLAIRE.

84. La même propoſition ſeroit encore vraye, ſi les corps étoient animés de forces accélératrices quelconques, conſtantes ou non, mais de directions perpendiculaires à ces plans. D'où il s'enſuit, que ſi les corps ſe mouvoient par la ſeule action de ces forces ſans aucune impulſion primitive, le centre de maſſes décriroit une ligne droite perpendiculaire à ces plans. Car dans ce dernier cas, ſi les corps étoient libres, le centre de gravité décriroit une droite perpendiculaire à ces plans; or ſon mouvement ne ſera altéré que par une force dont la di-

Digitized by Google

rection ſera perpendiculaire à ces plans : donc le centre de gravité ne ſortira jamais de la perpendiculaire.

Si les corps peſent vers un point fixe en raiſon de la diſtance, & que la ligne tirée du centre de gravité au point fixe dans le premier inſtant du mouvement, ſoit perpendiculaire au plan, on peut prouver de la même maniere que le centre de gravité ne ſortira jamais de la perpendiculaire.

SCOLIE I.

85. Les propoſitions qu'on a démontrées (*art.* 76 & 78) ſont également vrayes, quand les corps agiſſent les uns ſur les autres par une force d'attraction mutuelle. Car les chemins qu'ils feroient les uns vers les autres en vertu de cette attraction, étant réciproques à leurs maſſes, la ſomme des mouvemens de même part ſeroit zéro; par conſéquent le chemin du centre de gravité ne ſeroit point changé par l'action réciproque de ces corps les uns ſur les autres. On peut d'ailleurs appliquer ici la démonſtration donnée du Théorême I, en imaginant tous ces corps joints les uns aux autres par des verges inflexibles. Car alors en n'ayant égard qu'à leur attraction mutuelle, il eſt clair qu'ils reſteroient en équilibre. Donc &c.

SCOLIE II.

86. Il me ſemble que par les principes établis juſqu'ici, on peut démontrer ou plutôt expliquer cette fameuſe loi de Mécanique, que dans un ſyſtême de corps

Digitized by Google

pesans en équilibre, le centre de gravité est le plus bas qu'il est possible. Car supposons le système dans un état *B* infiniment proche de l'état d'équilibre; il est certain qu'il y aura dans chaque corps un petit mouvement pour se remettre à l'état d'équilibre, & l'effort de la pesanteur de chaque corps doit être regardé comme composé de ce petit mouvement, & d'un autre qui est détruit. Or comme l'état *B* est infiniment proche de l'état d'équilibre, les mouvemens détruits sont infiniment peu différens de l'effort total de la pésanteur, qui est détruit dans l'état d'équilibre; ainsi les mouvemens réels de chaque corps sont infiniment petits par rapport à ceux qu'ils auroient eus, s'ils avoient pû se mouvoir librement par leur pesanteur; & le mouvement du centre de gravité est infiniment moindre, que si les corps se fussent mûs librement. Cela ne seroit pas ainsi, si des deux états infiniment proches que l'on considere ici, l'un n'étoit pas l'état d'équilibre. D'où il s'ensuit, qu'on peut regarder le centre de gravité comme n'ayant point changé de place depuis l'état *B* jusqu'à l'état d'équilibre; c'est-à-dire qu'entre ces deux états la descente du centre de gravité est = o. Donc dans l'état d'équilibre la descente du centre de gravité est un *maximum*, & dans certains cas un *minimum*. Elle est par exemple un *maximum* dans le cas de la *chaînette*, & un *minimum* dans le cas de plusieurs globules égaux, qui se soutiennent en formant une voûte; ce qui n'est, comme l'on sait, que le cas de la *chaînette* renversé.

Digitized by Google

Peut-être s'exprimeroit-on avec plus d'exactitude, en disant simplement que dans le cas d'équilibre la différentielle de la descente du centre de gravité est = o; car on sait que l'égalité d'une différentielle à zéro, n'indique pas toujours nécessairement un *maximum* ou un *minimum.*

Au reste cette remarque suffit pour montrer qu'on auroit tort de déduire avec quelques Auteurs les loix de l'équilibre des fluides, de cette loi prétendue, que le centre de gravité d'une masse fluide en équilibre doit descendre le plus bas qu'il est possible. En effet si le fluide $DOSPE$, (Pl. V. fig. 8) dont toutes les parties pesent vers Q en raison de la distance, est en équilibre dans le vase $MDEN$, le centre de gravité de ce fluide ne sera pas le plus près du centre Q qu'il sera possible. Car soit $MNDE = DOSPE$; il est certain 1°. que le centre de gravité de chacune de ces parties sera ici le même que leur centre de masses. 2°. Que les parties KNP, MOL prises ensemble sont égales à LSK, & que KNP, MOL, qui sont plus près du centre Q, doivent avoir leur centre de masses au-dessus de MN, & par conséquent plus près de Q que celui de LSK, qui est au-dessus de MN. Donc puisque la partie $DOLKPE$ est d'ailleurs commune à $DOSPE$ & à $DMNE$, il s'ensuit qu'en supposant $QT =$ ou $> QG$, le centre de masses du fluide $DMNE$ est plus près de Q que celui du fluide $DOSPE$: cependant la premiere de ces masses fluides est en équilibre, & la seconde n'y est pas. Donc &c.

Digitized by Google

J'avois déja fait cette remarque dans mon *Traité de l'équilibre & du mouvement des fluides*, article 13. Elle eſt préſentée ici d'une maniere encore plus frappante, afin de précautionner les Géometres contre ces ſortes d'applications fautives de principes Mécaniques, auxquels on donne quelquefois trop de généralité.

CHAPITRE III.

Problêmes où l'on montre l'uſage du Principe précédent.

§. I.

Des Corps qui ſe tirent par des fils ou par des verges.

PROBLÊME I.

87. TROUVER *la viteſſe d'une verge* CR *fixe en* C (Fig. 22) *& chargée de tant de corps* A, B, R, *qu'on voudra, en ſuppoſant que ces corps, ſi la verge ne les en empêchoit, decriviſſent dans des tems égaux les lignes infiniment petites* AO, BQ, RT, *perpendiculaires à la verge.*

Toute la difficulté ſe réduit à trouver la ligne *RS* parcourue par un des corps *R*, dans le même tems qu'il eût parcouru *RT*; car alors les viteſſes *BG*, *AM* de tous les autres corps ſeront connues. Or regardons les viteſſes imprimées *RT*, *BQ*, *AO*, comme compoſées

fées (*art.* 30 & 60) des viteſſes RS, ST; BG, $-GQ$; AM, $-MO$; par notre principe, le levier CAR ſeroit demeuré en repos, ſi les corps R, B, A n'avoient reçû que les mouvemens ST, $-GQ$, $-MO$. Donc (17) $A.MO.AC+B.GQ.BC=R.ST.CR$, c'eſt-à-dire qu'en nommant AO, a, BQ, b, RT, c, CA, r, CB, r, CR, ρ, & RS, z, on aura $R.\overline{c-z}.\rho=Ar\left(\frac{zr}{\rho}-a\right)+Br\left(\frac{zr}{\rho}-b\right)$; par conſéquent $z=\frac{Aar\rho+Bbr\rho+Rc\rho\rho}{Arr+Brr+R\rho\rho}$.

COROLLAIRE I.

88. Soient F, f, φ, les forces motrices des corps A, B, R, & on trouvera pour la force accélératrice du corps R, $\frac{Fr+fr+\varphi\rho}{Arr+Brr+R\rho\rho}\times\rho$, en mettant pour a, b, c (*art.* 22) leurs valeurs $\frac{F}{A}$, $\frac{f}{B}$, $\frac{\varphi}{R}$. Donc ſi on prend ds pour l'élément de l'arc décrit du rayon CR, & u pour la viteſſe du corps R, on aura en général (18)

(17) Voyez la note (13) *pag.* 60, & obſervez que $A\times MO$, $B\times GQ$ &c. ſont ici les *puiſſances*.

(18) Il faut conſidérer que AO, BQ, RT ſont les impulſions momentanées que les forces accélératrices communiquent aux corps A, B, R; & puiſque le corps R n'en conſerve que RS ou z, il s'enſuit que pour avoir le mouvement de ce corps il faut mettre dans la formule $\varphi de=udu$ de l'article 21, à la place de φ la valeur de z, & ds à la place de de. Voyez la note (5) *pag.* 24.

$\frac{Fr + fr + \phi\rho}{Arr + Brr + R\rho\rho} \cdot \rho\, ds = u\, du$, quelles que soient les forces F, f, φ. Il eſt aiſé par ce moyen de réſoudre le Problême des centres d'oſcillation dans une hypotheſe quelconque.

Suppoſons par exemple que le pendule oſcille dans un milieu réſiſtant comme une puiſſance quelconque u^n de la viteſſe, on aura au lieu de φ, $\varphi - ku^n$, (19) au lieu de F, $F - \frac{g u^n r^n}{\varrho^n}$, & au lieu de f, $f - \frac{h u^n r^n}{\varrho^n}$; & on mettra ces valeurs dans l'équation précédente; on conſidérera enſuite qu'en ſuppoſant x la longueur du pendule iſochrone, & nommant M ſa maſſe, & Π ſon poids, ou plutôt la partie de ſon poids qui agit perpendiculairement à la verge, on aura pour l'équation du mouvement de ce pendule (20)

$$\frac{\Pi x\, ds}{\varrho} - \frac{l u^n x^n}{\varrho^n} \times \frac{x\, ds}{\varrho} = \frac{M x x\, du}{\varrho\varrho};$$

(19) Soit m la réſiſtance qu'éprouveroit de la part du milieu le corps R mû avec la viteſſe p; celle qu'il éprouvera lorſqu'il ſera mû avec la viteſſe u ſera $\frac{m u^n}{p^n}$, enſorte que ſa force motrice ne ſera plus que $\phi - \frac{m u^n}{p^n}$; & il eſt viſible que la quantité k par laquelle on a repréſenté $\frac{m}{p^n}$ dépend du volume, de la denſité, & de la figure du corps R; il en eſt de même des quantités g, h, l.

(20) L'équation qui naîtra de la ſubſtitution de $\phi - ku^n$, $F - \frac{g u^n r^n}{\varrho^n}$ &c. à la place de ϕ, F &c. ſera de cette forme $(P + Qu^n)\, ds = u\, du$; celle

Digitized by Google

d'où l'on tire $\frac{\Pi \varrho ds}{M x} - \frac{l u^n x^{n-1} ds}{M \varrho^{n-1}} = u du$; comparant cette équation terme à terme avec celle du mouvement du pendule composé, on en tirera les valeurs de x & de l; & il eſt à remarquer que la quantité l dépend du volume du corps M, de ſa figure & de ſa denſité; & qu'ainſi on ne doit pas ſuppoſer toutes ces choſes données (21).

Il eſt à remarquer de plus qu'on ne s'exprimeroit pas exactement, en diſant avec quelques Auteurs que la diſtance x du centre d'oſcillation eſt toujours la même,

---

du mouvement du pendule ſimple ſera $\left(\Pi - \frac{l u'^n x^n}{\varrho^n}\right) ds' = M u' du'$ (en nommant ds' le petit arc qu'il parcourt dans un inſtant, & u' ſa viteſſe); mais comme on ſuppoſe qu'il décrit des arcs ſemblables à ceux du pendule compoſé, on a $ds' = \frac{x ds}{\varrho}$, & $u' = \frac{xu}{\varrho}$; donc toute réduction faite $\left(\frac{\Pi \varrho}{Mx} - \frac{l u^n x^{n-1}}{M \varrho^{n-1}}\right) ds = u du$; dans cette équation u & s ſignifient les mêmes choſes que dans celle du pendule compoſé; donc les deux équations doivent être identiques, & chaque terme égal à ſon correſpondant; ainſi on a $\frac{\Pi \varrho}{Ml} = P$; $- \frac{l x^{n-1}}{M \varrho^{n-1}} = Q$.

(21) Il eſt viſible que ſi on ſuppoſoit M donné, l qui en dépend, comme on vient de le voir dans la note (19), ſeroit donné auſſi; par conſéquent ayant une ſeule indéterminée x, & deux équations $\frac{\Pi \varrho}{Mx} = P$, $- \frac{l x^{n-1}}{M \varrho^{n-1}} = Q$, il ne ſeroit pas toujours poſſible de ſatisfaire à toutes les deux. Voyez *Mémoires de l'Acad.* 1738.

Digitized by Google

$\frac{R.CR^2}{CP^2} + \frac{B.CB^2}{CP^2} + \frac{A.CA^2}{CP^2}$, & qui ſoit animé d'une force accélératrice, en vertu de laquelle le *moment* de ce poids ſoit égal aux *momens* des poids A, B, R, animés de leurs peſanteurs naturelles AO, BQ, RT, & ſa viteſſe, celle du point P de la verge. D'où il s'enſuit, que cette force accélératrice ſera $\frac{RS.CP}{CR}$, & qu'ainſi on aura $RS.\frac{CP}{CR}\left(\frac{R.CR^2}{CP^2} + \frac{B.CB^2}{CP^2} + \frac{A.CA^2}{CP^2}\right) \times CP = A.AO.CA + B.BQ.CB + R.RT.CR$. Il eſt viſible que le premier membre de cette égalité, n'eſt autre choſe que la ſomme des *momens* $A.AM.CA + B.BG.CB + R.RS.CR$.

On voit par-là que ſans avoir recours au point P, & ſans faire aucune ſubſtitution de maſſes, on peut par le principe fondamental de la ſolution de M. *Bernoulli*, réſoudre plus ſimplement encore qu'il ne l'a fait, le Problême des centres d'oſcillation.

C'eſt de cette derniere maniere que j'avois imaginé d'abord de réſoudre ce Problême, & c'eſt auſſi ce qu'a fait M. *Euler* dans un Mémoire imprimé au *Tome VII. de l'Acad. de Peterſbourg*, & où il ſe ſert de ce dernier principe, que les puiſſances $R.RS$, $B.BG$, $A.AM$ doivent être équivalentes aux puiſſances $R.RT$, $B.BQ$, $A.AO$. Mais M. *Euler* n'a point démontré ce principe, qui, ce me ſemble, ne peut l'être que par le moyen

Digitized by Google

du nôtre. D'ailleurs l'Auteur n'a appliqué ce principe qu'à la ſolution d'un petit nombre de Problêmes touchant les oſcillations des corps, flexibles ou inflexibles ; & la ſolution qu'il a donnée d'un de ces Problêmes eſt peu exacte, comme nous aurons occaſion de le faire voir dans la ſuite ; ce qui ne ſervira pas peu à montrer combien notre principe eſt préférable, pour réſoudre non-ſeulement les Problêmes de cette eſpece, mais en général toutes les queſtions de Dynamique.

LEMME VII.

90. Si deux lignes infiniment petites Pp, Mm, (Fig. 23) ſont jointes par les lignes finies PM, pm, & qu'on faſſe $p\pi = Pp$, & $m\mu = Mm$; je dis 1°. que l'excès de PM ſur $\pi\mu$ eſt égal à deux fois la différence de PM à pm, moins le quarré de l'angle fait entre PM & pm, multiplié par PM.

2°. Que l'angle de $\pi\mu$ avec pm eſt égal à l'angle de PM avec pm, multiplié par $1 + \frac{2.\overline{PM - pm}}{PM}$.

Car ayant mené les lignes Ma, πe, μf parallèles à pm, & Mb, aPd, $C\pi f$, μeg perpendiculaires à pm, on aura $Mb = \mu g$; $Pd = \pi C$. Donc μe ou $\pi f = Pa$. Or deux angles infiniment petits PMa, $e\pi\mu$, dont les rayons PM, $\pi\mu$, différent infiniment peu (les lignes infiniment petites Pa, $e\mu$ étant d'ailleurs égales) ne different que d'un infiniment petit du

Digitized by Google

fecond ordre, puiſque la différence des ſinus eſt $\frac{\mu e}{\pi \mu}$ $- \frac{Pa}{PM} = \frac{Pa(PM - \pi\mu)}{PM.\pi\mu}$, c'eſt-à-dire infiniment petite du fecond ordre. Donc cette derniere quantité, multipliée par Pa, ſera du troiſiéme ordre. Or $PM - pm = PM - Ma + Ma - Pm = \frac{Pa^2}{2PM}$ $+ bm - dp$; & on trouvera de même $pm - \mu\pi =$ $- \frac{\pi f^2}{2\pi\mu} + mg - Cp$. Donc en négligeant les différences troiſiémes, on a $PM - \pi\mu = 2.\overline{bm - dp}$ $= 2.\overline{PM - pm} - \frac{Pa^2}{PM} = 2.\overline{PM - pm} -$ angl. $\overline{aMP^2} \times PM$.

3°. L'angle $e\pi\mu$ ou l'angle de pm avec $\pi\mu = \frac{\mu e}{\pi e} =$ $\frac{Pa}{pm - (bm - dp)} = \frac{Pa}{Ma - 2(bm - dp)} = \frac{Pa}{Ma}$ $+ \frac{2.\overline{bm - dp}}{Ma} \times \frac{Pa}{Ma} =$ (en négligeant les différences troiſiémes) à l'angle $aMP\left(1 + \frac{2.\overline{PM - pm}}{PM}\right)$. *Ce qu'il falloit démontrer.*

COROLLAIRE I.

91. Si les lignes PM, pm ſont égales, alors $PM. - \pi\mu = -$ (angl. $aMP)^2.PM$; & l'angle $e\pi\mu = aMP$.

COROLLAIRE II.

92. Si les lignes Mm, $m\mu$ (Fig. 24) ſont $= o$, alors $M\pi - PM = + 2pO + \frac{PO^2}{PM}$, & l'angle $pM\pi - PMp = - \frac{2pO}{PM}$. PMp.

PROBLÊME II.

93. *Suppoſons qu'une verge* G A *fixe en* G (Fig. 25) *& ſituée ſur un plan horizontal, ſoit chargée de deux corps* A, D, *dont l'un* A *ſoit fixement attaché à la verge, l'autre* D *puiſſe couler librement le long de la verge par le moyen d'un anneau; on demande la viteſſe de chacun de ces corps à chaque inſtant, & la courbe décrite par le corps* D.

Soient AB, DE les petites lignes décrites par les corps A, D, durant un même inſtant; ſi l'on fait l'arc $BC = AB$, & la ligne $Ei = ED$ & dans la même direction, il eſt clair que ces lignes BC, Ei ſeroient parcourues par les deux corps dans l'inſtant ſuivant, ſi la verge ne les en empêchoit. Le corps A qui décrit néceſſairement l'arc BC, ne décrira donc plus cet arc dans un inſtant égal au premier : or que la petite ligne BQ infiniment peu différente de BC, ſoit celle que le corps A auroit parcourue uniformément avec la viteſſe qu'il a en B, dans l'inſtant qu'il parcourt BC par ſon mouvement contraint; & que Eo ſoit la ligne que le corps

corps D eût auſſi décrit uniformément dans le même tems, & au lieu de laquelle il décrira la ligne Ep à cauſe de la réſiſtance de la verge; il eſt clair qu'en regardant les mouvemens BQ & Eo, comme compoſés des mouvemens BC, CQ, & Ep, El, le levier GB eût été en équilibre, ſi les corps A, D, n'avoient eu que les mouvemens CQ, El. Or comme (*hyp.*) le corps D peut gliſſer le long de la verge, il eſt néceſſaire pour l'équilibre, que El ſoit perpendiculaire au levier GB; & de plus, il faut que $A.CQ.GA = D.El.GE$. Cela poſé,

Soit $GA = a$, $AB = dx$, $GD = y$, $FD = \frac{ydx}{a}$, $FE = dy$, $CQ = a$. On ſuppoſe que BQ ſeroit décrite avec la même viteſſe que AB, & Eo avec la même viteſſe que DE; donc les lignes BQ & AB, ainſi que les lignes Eo, DE ſont entr'elles comme les tems employés à les parcourir; & comme BQ, Eo ſeroient parcourues (*hyp.*) dans un même tems, ainſi que AB & DE, on aura $BQ : AB$ ou $BC :: Eo : DE$ ou Ei: donc $BC : CQ :: DE : io$. Donc $io = \frac{CQ.DE}{BC}$. De plus $A.CQ.GA = D.El.GE$ donne El ou $po = \frac{Aaa}{Dy}$. Or l'angle iGE (*art.* 92) $=$

$$EGD \times 1 - \frac{2FE}{GD} = EGD - \frac{2dydx}{ay};$$

& ſi à l'angle iGE on ajoûte (22) l'angle $iGo = \frac{io}{Gi} \times \frac{DF}{DE} = \frac{CQ.DF}{Gi.BC} = \frac{CQ}{GD} \times \frac{DF}{AB} = \frac{CQ}{GA} = \frac{\alpha}{a}$, & l'angle oGp ou $\frac{po}{GD} = \frac{A\alpha a}{Dyy}$, on aura l'angle $pGE = EGD - \frac{2dydx}{ay} + \frac{\alpha}{a} + \frac{A\alpha a}{Dyy}$; & comme cet angle pGE eſt égal à l'angle EGD (*conſtr.*) on a $- \frac{2dydx}{ay} + \frac{\alpha}{a} + \frac{A\alpha a}{Dyy} = 0$. Donc $\alpha = \frac{2Dydydx}{Aaa + Dyy}$.

Préſentement la différence de Gi à GD eſt (*art.* 92) $2dy + \frac{y^2dx^2}{a^2x}$, & $\frac{\alpha dy}{dx}$ exprime la différence de Gp ou Go à Gi. Donc $Gp - GE = dy + \frac{ydx^2}{a^2} + \frac{\alpha dy}{dx}$. Donc $ddy = \frac{ydx^2}{a^2} + \frac{\alpha dy}{dx}$, ou mettant pour α ſa valeur déja trouvée, $ddy = \frac{ydx^2}{a^2} + \frac{2Dydy^2}{Aaa + Dyy}$, équation de la courbe DEp.

Pour en ſéparer les indéterminées, ſoit $dx = \frac{pdy}{a}$,

(22) Si on décrit du centre G l'arc is, l'angle $iGo = \frac{is}{iG}$, & $is = \frac{io \times DF}{DE}$, à cauſe des triangles ſemblables DFE, sio.

on aura $ddy = -\frac{dp\,dy}{p}$, & $-\frac{a^4\,dp}{p^3} - \frac{2\,y\,dy\,.\,a^4\,D}{p^2\,.\,(Aaa + Dyy)} = y\,dy$; cette équation étant multipliée par $\frac{1}{(Aaa + Dyy)^2}$, & enſuite intégrée, donne $\frac{a^4}{2p^2(Aaa + Dyy)^2} = G - \frac{1}{2D(Aaa + Dyy)}$; G exprimant une conſtante telle, que $\frac{p}{a}$ devienne à l'origine de la courbe le rapport donné de dx à dy (23). On a donc dx ou $\frac{p\,dy}{a} = \frac{a\,dy\sqrt{D}}{\sqrt{(Aaa + Dyy)[2GD(Aaa + Dyy) - 1]}}$ pour l'équation de la courbe DEp.

A l'égard des viteſſes de chaque corps, on trouve (24) qu'en nommant u la viteſſe du corps A, on a $-\frac{du}{u} = \frac{CQ}{BC}$, puiſque $\frac{BQ}{BC}$ eſt le rapport du ſecond

(23) Soit PE (Pl. V. fig. 9) la direction de l'impulſion que reçoit le corps D au commencement, & ſoient AK, Ei les lignes que les deux corps A & D tendent à décrire dans un inſtant en vertu des impulſions primitives; ſuppoſons qu'au lieu de ces lignes ils décrivent AB, Ep; le rapport de AB à Fp eſt celui qu'on doit prendre pour le rapport de dx à dy à l'origine, & le rapport de AB à Ep pour celui de g à h, qu'on ſuppoſe être les viteſſes initiales; on déterminera aiſément toutes ces quantités, en ſuivant exactement les mêmes principes qui ont été donnés dans le Problème, ainſi que la figure l'indique.

(24) On a $AB = udt$; donc puiſque AB eſt conſtant, $du\,dt + u\,ddt = o$; & par conſéquent $-\frac{du}{u} = \frac{ddt}{dt} = \frac{CQ}{AB} = \frac{CQ}{BC}$.

Digitized by Google

instant au premier. Donc $-\frac{du}{u} = \frac{2Dydy}{Aaa + Dyy}$, & $\frac{u}{g} = \frac{Aaa + Dbb}{Aaa + Dyy}$, en prenant g pour la vitesse initiale du corps A, & supposant $y = b$ à l'origine de la courbe DEp. De même si on nomme v la vitesse du corps D, on a $\frac{dv}{v} = \frac{Ep - Eo}{Eo} = \frac{po.FD}{DE^2} = \frac{Aaa.ydx}{Dyy.a\left(dy^2 + y^2\frac{dx^2}{a^2}\right)}$; mais on peut avoir v plus élégamment par le principe de la conservation des forces vives que nous démontrerons ci-après, & qui donne $Dvv + Auu =$ à une constante. D'où il s'ensuit, que si on appelle h la vitesse initiale du corps D, on aura $vv = \frac{Dhh + Agg - Auu}{D}$.

REMARQUE I.

94. J'ai évité de faire dans la solution de ce Problême les dt ou élémens du tems constans, afin de pouvoir parvenir à l'équation de la courbe, sans avoir l'expression de la vitesse, ce qui seroit nécessaire si on faisoit les dt constans, parce que dt étant $\frac{dx}{u}$, on ne peut chasser dt que quand on connoit la valeur de u. C'est ainsi que j'en userai toujours dans la suite. Ce n'est pas qu'on ne puisse avoir u par différens moyens. Mais j'ai cru qu'il étoit à propos de faire voir de quelle

Digitized by Google

maniere on peut s'en paſſer dans la ſolution de ces ſortes de Problêmes.

REMARQUE II.

95. Le Problême précédent ne ſeroit pas beaucoup plus difficile, ſi les corps A, D, étoient animés par des forces accélératrices p, f, de directions & de valeurs quelconques. Pour donner un eſſai du calcul qu'il faudroit faire en cette occaſion, je ſuppoſerai chaque force accélératrice conſtante, & dirigée parallèlement à la verticale VA, en imaginant le ſyſtême tranſporté ſur un plan vertical. La conſtruction demeurant la même que dans l'article 93, ſoit de plus QN l'eſpace que le corps A auroit parcouru par ſa peſanteur p, dans l'inſtant qu'il parcourt BC par ſon mouvement contraint; comme cet inſtant differe infiniment peu du premier, on aura (25) $QN = p.\frac{GV}{GA} \times \frac{dx^2}{u^2}$; de même $o\zeta = \frac{fdx^2}{u^2}$; (26) $\zeta\pi = \frac{A.CN.GA}{D.DG} = \frac{Aa}{Dy} \times$

(25) $QN = \phi dt^2$, en nommant ϕ la force accélératrice ſuivant QN. Mais ſi on décompoſe la peſanteur p en deux forces, l'une perpendiculaire à QN, & l'autre ſuivant QN, la derniere ſera $\frac{p \times GV}{GA}$; de plus $dx = udt$; donc $QN = \frac{p \times GV}{GA} \times \frac{dx^2}{u^2}$.

(26) On ſuppoſe ici que π ſoit le point où le corps D arrive au ſecond inſtant; & puiſqu'il parvient en π au lieu d'être en ζ, comme il y auroit été en vertu de ſon mouvement propre & de la peſanteur, il s'enſuit qu'en

$\left(a + \frac{p\,z\,dx^2}{a\,u^2}\right)$ en nommant GV, z. On aura enſuite, comme dans l'article 93, $\frac{2\,y\,dx\,dy}{a\,y\,y} = \left(a + \frac{p\,z\,dx^2}{a\,u^2}\right) \times \frac{Aa}{Dyy} + \frac{\alpha}{a} + \frac{f\,dx^2}{u^2} \times \frac{z}{a\,y}$; & $ddy = \frac{y\,dx^2}{a^2} + \frac{\alpha\,dy}{dx} + \frac{f\,dx^2 \cdot \sqrt{[a^2 - z^2]}}{a\,u^2}$: on a de plus $-\frac{du}{u} = \frac{\alpha}{dx}$. Si on met dans la premiere équation à la place de α ſa valeur $-\frac{dx\,du}{u}$, ou $-\frac{u\,du\,dx}{u^2}$, on aura (en intégrant) la valeur de uu, qui étant ſubſtituée, ainſi que la valeur de α, dans la ſeconde équation $ddy = \frac{y\,dx^2}{a^2}$ &c. on aura l'équation de la courbe DEp; dans laquelle on remarquera que $\frac{z}{a} = \text{cof.}\left(\frac{x}{a}\right)$ (*), & $\frac{\sqrt{aa - zz}}{a} = \text{ſin.}\left(\frac{x}{a}\right)$, ce qui donne un moyen facile de chaſſer z.

décompoſant (comme on l'a enſeigné) le mouvement qu'il devoit avoir, il faudra que $\pi\,z$ ſoit perpendiculaire à GC, & que $\pi\,z \times D \times G\pi$ ou $\pi\,z \times D \times DG = A \times CN \times AG$. Donc &c.

(*) Ces expreſſions $\text{cof.}\left(\frac{x}{a}\right)$, $\text{ſin.}\left(\frac{x}{a}\right)$ indiquent le coſinus & le ſinus de $\frac{x}{a}$; & en général dans toute la ſuite de cet Ouvrage, je déſignerai le ſinus & le coſinus d'un angle quelconque ζ, par $\text{ſin.}\,\zeta$ & $\text{cof.}\,\zeta$.

Digitized by Google

Remarque III.

96. Si une puiſſance appliquée au corps A l'oblige de ſe mouvoir ſur la courbe AN, avec une viteſſe dont la loi à chaque point ſoit donnée, & qu'on demande la courbe du corps D & ſa viteſſe; ce Problême ſe réduit au précédent, en cherchant de quelle force accélératrice φ le corps A devroit être animé, pour qu'étant mû conjointement avec le corps D, il eût à chaque point B la viteſſe donnée.

Dans la premiere des quatre équations de l'article précédent, on mettra φ pour $\frac{p\,\alpha}{a}$, & à cauſe que u eſt donnée en x, on ſuppoſera $u = X$, & $-\frac{du}{u} = -\frac{dX}{X} = \frac{\alpha}{dx}$. Donc $\alpha = -\frac{dX\,dx}{X}$: cette valeur de α étant comparée à celle qu'on tirera de la premiere équation, on aura la valeur de φ & l'équation de la courbe DEp. Soit par exemple $f = o$, $u =$ à une conſtante g, on aura $\alpha = o$, & $\frac{2\,dy\,dx}{a\,y} = \frac{\varphi\,dx^2}{g^2} \cdot \frac{A\,a}{Dyy}$. Donc $\varphi = \frac{2\,Dg^2\,y\,dy}{A\,a^2\,dx}$, & $d\,dy = \frac{y\,dx^2}{a^2}$. Donc $dx = \frac{a\,dy}{\sqrt{(G\,a^2 + yy)}}$; & $\varphi = \frac{2\,Dg^2\,y}{A\,a^3}\sqrt{\left[(G\,a^2 + y\,y)\right]}$. Si $G = o$, on a $y = c^{\frac{x}{a}}$, & $\varphi = \frac{2\,Dg^2 \cdot c^{\frac{2x}{a}}}{A\,a^3}$. C'eſt pour-

quoi la courbe décrite par le corps D eſt en ce cas une *ſpirale logarithmique*, puiſque $\frac{dx}{a} = \frac{dy}{y}$.

S'il n'y avoit pas de corps au point A, mais qu'en vertu d'une puiſſance quelconque appliquée à la verge, la viteſſe du point A ſuivant AB fût donnée, on pourroit réſoudre le Problême de la même maniere, en imaginant qu'il y eût au point A un corps de maſſe quelconque, & en cherchant de quelle force accélératrice ce corps devroit être animé, pour qu'étant mû conjointement avec le corps D, il eût à chaque point B la viteſſe dont la loi eſt donnée. En général, on peut toujours employer cette Méthode, lorſque des corps ſe tiennent par des fils ou par des verges d'une maniere quelconque, & qu'un ou pluſieurs points des fils ou des verges ſont ſuppoſés ſe mouvoir avec une viteſſe & une direction données. J'avoue qu'on peut réſoudre ces Problêmes d'une maniere plus ſimple, ſans chercher quelle doit être la force accélératrice du corps dont la viteſſe eſt donnée, pour qu'il ſe meuve avec cette viteſſe en vertu de l'action des autres corps; mais la ſolution que nous propoſons ici, quoique plus longue, n'en eſt pas moins tirée des vrais principes de la choſe, puiſqu'il eſt certain que la puiſſance qui meut le corps avec une viteſſe donnée, eſt différente de ce qu'elle ſeroit, ſi tous les autres corps étoient anéantis, attendu qu'une partie de cette puiſſance eſt employée à vaincre l'action de ces mêmes corps. Notre ſolution détermine la différence de ces

ces deux puiſſances, & c'eſt en quoi conſiſte, ce me ſemble, la vraye Métaphyſique du Problême dont il s'agit.

Remarque IV.

97. Si la verge étoit chargée de deux corps qui puſſent couler librement le long de cette verge, on trouveroit de la maniere ſuivante les courbes décrites par les deux corps.

Afin de conſerver l'analogie avec la ſolution précédente, on ſuppoſera que le corps A exiſte toujours, mais qu'il ſoit infiniment petit par rapport aux deux corps donnés, & l'on aura $-\frac{2dydx}{ay}+\frac{\alpha}{a}+\frac{po}{y}=0$; & nommant z le rayon vecteur de l'autre corps que j'appelle E, $-\frac{2dzdx}{az}+\frac{\alpha}{a}-\frac{po.Dy}{Ezz}=0$, d'où l'on tire $\frac{\alpha}{dx}=\frac{2Dydy+2Ezdz}{Dyy+Ezz}$; or $\frac{\alpha}{dx}=\frac{ddt}{dt}$; donc $\frac{ddt}{dt}=\frac{2Dydy+2Ezdz}{Dyy+Ezz}$, & $bdt=(Dyy+Ezz)dx$. De plus les équations $ddy=ydx^2+\frac{\alpha dy}{dx}$, & $ddz=zdx^2+\frac{\alpha dz}{dx}$, donneront (en faiſant évanouir dx^2, & mettant $\frac{ddt}{dt}$ pour $\frac{\alpha}{dx}$) $\frac{ydz-zddy}{ydz-zdy}=\frac{ddt}{dt}$, & par

conſéquent $y\,dz - z\,dy = f\,dt$; donc $y\,dz - z\,dy = \frac{f\,dx\,(Dyy + Ezz)}{b}$; donc ſuppoſant $z = yu$, on a $\frac{du}{D + Euu} = \frac{f\,dx}{b}$, & $yy = \frac{f\,dt}{du}$. Nous aurons donc y ſi nous pouvons trouver encore une équation ſéparée entre dt & dx. Or 1°. le principe de la conſervation des forces vives donne $g\,dt^2 = (D\,yy + E\,zz)\,dx^2 + D\,dy^2 + E\,dz^2$, ou $g\,dt^2 = b\,dt\,dx + D\,dy^2 + E\,dz^2$, équation qu'on pourroit auſſi tirer directement de notre ſolution. 2°. L'équation $(E\,zz + D\,yy)\,dx = b\,dt$ étant différentiée deux fois de ſuite, donne $(2\,E\,z\,dz + 2\,D\,y\,dy)\,dx = b\,ddt$; & $(2\,E\,z\,ddz + 2\,D\,y\,ddy + 2\,E\,dz^2 + 2\,D\,dy^2)\,dx = b\,d^3t$; ſi on ſubſtitue dans cette derniere équation à la place de $2\,D\,dy^2 + 2\,E\,dz^2$ ſa valeur $2\,g\,dt^2 - 2\,b\,dt\,dx$, à la place de ddy ſa valeur $y\,dx^2 + \frac{ddt\,dy}{dt}$, à la place de ddz ſa valeur $z\,dx^2 + \frac{ddt\,dz}{dt}$, & à la place de $(D\,yy + E\,zz)\,dx$ & de $(2\,D\,y\,dy + 2\,E\,z\,dz)\,dx$, leurs valeurs $b\,dt$ & $b\,ddt$, on aura $2\,b\,dt\,dx + \frac{b\,ddt^2}{dx\,dt} + 2\,g\,dt^2 - 2\,b\,dt\,dx = \frac{b\,d^3t}{dx}$, ou $\frac{b\,d^3t}{dx\,dt} - \frac{b\,ddt^2}{dx\,dt} = 2\,g\,dt$, dont l'intégrale

Digitized by Google

eſt $\frac{b\,d^2\,t}{dx\,dt} = 2gdt + m$; donc $b\,dt = gtt\,dx + mt\,dx + h\,dx$. Donc on aura la valeur de dx en dt. Donc &c.

Il n'eſt point à craindre que les équations $\frac{f\,dx}{b} = \frac{du}{D + Euu}$ & $dx = \frac{b\,dt}{gtt + mt + h}$ ſoient la même équation ; car il faudroit pour cela que du fût $= n\,dt$, n étant une quantité conſtante ; donc puiſque $yy = \frac{f\,dt}{du}$, on auroit $y =$ à une conſtante, ce qui ne ſe peut ; car (*hyp.*) le corps D n'eſt pas fixe.

Dans les *Mémoires de l'Académie* de 1742. pag. 31, on s'eſt contenté de trouver l'équation entre dx & dt, & par conſéquent la ſituation de la verge à chaque inſtant, mais on n'a point conſtruit les courbes décrites par les deux corps ; ou plutôt on a conſtruit ces courbes, pag. 35, par une méthode qu'on avoüe n'être point Géométrique, parce qu'elle ne ſuppoſe point la ſéparation des indéterminées ; on auroit pû remarquer cependant que les équations $ddy = y\,dx^2$ & $ddz = z\,dx^2$, auxquelles on parvient en faiſant dt conſtant, donnent $\frac{ddy}{y} = \frac{ddz}{z}$, & par conſéquent $y\,ddz - z\,ddy = 0$, ou $y\,dz - z\,dy = f\,dt$; d'où on auroit pû tirer la même conſtruction qui vient d'être donnée.

La courbe décrite par le corps D, donnera la courbe décrite par le corps E, puiſque $z = yu$.

Digitized by Google

REMARQUE V.

98. S'il y a trois corps D, E, H, qui puiſſent couler librement le long de la verge, on trouvera de la même maniere que ci-deſſus, une équation ſéparée entre dx & dt; de plus on aura par une méthode ſemblable, $y\,dz - z\,dy = f\,dt$, & $y\,ds - s\,dy = k\,dt$, en nommant s la diſtance variable du corps H au centre ou point fixe G, & ſuppoſant k une quantité conſtante différente de f. Donc $y\,dz - z\,dy = \frac{f}{k} \times (y\,ds - s\,dy)$; donc diviſant par y^2 & intégrant, on aura $\frac{z}{y} = \frac{fs}{ky} + A$; donc ſi on fait $z = yu$, on aura $\frac{s}{y} = \mathfrak{C}u + \gamma$, $\mathfrak{C}$ & γ étant des conſtantes.

Maintenant on trouvera par la même méthode que ci-deſſus, $b\,dt = (D\,yy + E\,zz + H\,ss)\,dx$; donc $\frac{y\,dz - z\,dy}{D\,yy + E\,zz + H\,ss} = \frac{f\,dx}{b}$; c'eſt-à-dire $\frac{d\left(\frac{z}{y}\right)}{D + \frac{E\,zz}{yy} + \frac{H\,ss}{yy}} = \frac{f\,dx}{b}$; ou $\frac{du}{D + E\,uu + (\mathfrak{C} + \gamma u)^2} = \frac{f\,dx}{b}$; d'où l'on voit qu'on peut conſtruire encore dans ce cas-ci les courbes décrites par chacun des corps D, E, H.

Il eſt viſible que le Problême ne ſera pas plus difficile, quel que ſoit le nombre des corps D, E, H, &c.

Digitized by Google

Remarque VI.

99. S'il y a un corps A fixement attaché à la verge à une distance a que je suppose $= 1$, & deux autres corps D, E, qui puissent couler librement le long de la verge, on aura par une méthode semblable à celle de l'article 97 ci-dessus,

1°. $(Dyy + Ezz + A)\,dx = b\,dt$.

2°. $y\,dz - z\,dy = f\,dt$.

3°. $d\left(\frac{b\,dd\,t}{dx\,dt}\right) = 2g\,dt - \frac{2A\,dx^2}{dt}$.

Faisons dans cette derniere équation $dx = p\,dt$, ce qui donne $\frac{dd\,t}{dt} = \frac{-dp}{p}$, & nous aurons $d\left(\frac{-b\,dp}{pp\,dt}\right) = 2g\,dt - 2App\,dt$; soit $dt = \frac{dp}{k}$; il viendra $d\left(\frac{-bk}{pp}\right) = \frac{2g\,dp}{k} - \frac{2App\,dp}{k}$; ou $\frac{2g\,dp}{k} - \frac{2App\,dp}{k} + \frac{bdk}{pp} - \frac{2bk\,dp}{p^3} = 0$, ou multipliant par $\frac{k}{pp}$, & intégrant ensuite, $\frac{kkb}{2p^4} - \frac{2g}{p} - 2Ap + L = 0$, L étant une constante; d'où l'on tire la valeur de dt & de dx en p & dp, de sorte qu'on aura $dt = \Pi\,dp$, & $dx = \Psi\,dp$, Π & Ψ étant des fonctions connues de p, dont la seconde Ψ est $= p\,\Pi$.

Digitized by Google

On aura donc $Dyy + E\zeta\zeta = \frac{b\,d\,t}{d\,x} - A = \frac{b\,\Pi}{\Psi} - A$, & $\frac{y\,d\,\zeta - \zeta\,d\,y}{Dyy + E\zeta\zeta} = \frac{f\,d\,t}{\frac{b\,n}{x} - A} = \frac{f\,\Pi\,d\,p}{\frac{b\,n}{x} - A}$; d'où l'on tire en faiſant $\frac{\zeta}{y} = u$, l'équation ſéparée $\frac{d\,u}{D + E\,u\,u} = \frac{f\,p\,\Pi\,d\,p}{b - A\,p}$. On peut donc en ce cas conſtruire les courbes décrites par les deux corps, & trouver la ſituation de la verge à chaque inſtant.

REMARQUE VII.

100. Si on ſuppoſoit deux corps A, B, fixement attachés à la verge, & deux autres qui puſſent y couler librement, le Problême ſe réſoudroit encore de la même maniere.

Donc en général on pourra réſoudre le Problême, quel que ſoit le nombre des corps attachés fixement à la verge, en ſuppoſant qu'il y ait outre cela deux corps qui puiſſent y couler librement.

Donc le Problême pourra encore ſe réſoudre également, ſi le nombre des corps fixement attachés à la verge eſt infini, c'eſt-à-dire ſi on a égard à la maſſe de la verge. D'ailleurs il eſt facile de voir que le calcul ſera le même dans ce cas que dans celui de la Remarque précédente, en prenant la quantité A pour la ſomme

Digitized by Google

des produits de chaque particule de la verge par le quarré de leur distance au point fixe *G*.

Enfin quand il y auroit plus de deux corps pouvant couler librement le long de la verge, on voit par l'article 97, & par le précédent, que le Problême se résoudroit encore par les mêmes méthodes.

Donc en général, une verge droite quelconque, placée sur un plan horizontal, étant chargée de tant de corps qu'on voudra, dont les uns puissent couler librement le long de la verge, les autres y soient attachés, on pourra toujours trouver la situation de la verge à chaque instant, & les courbes décrites par chacun des corps libres, en ayant même égard, si l'on veut, à la masse de la verge; Problême jusqu'ici non résolu.

PROBLÊME III.

101. *Un corps* P *descendant le long d'une courbe* C B, (Fig. 26) *& tirant après lui un autre corps* F *par le moyen d'un fil* P C F *qui passe sur une poulie* C, *trouver la viteſſe de chacun de ces corps.*

Soit Pp l'élément parcouru dans un instant par le corps P, & $Ff = pV$ l'élément parcouru par l'autre corps durant le même instant. Dans l'instant suivant, ces corps, si rien ne les en empêchoit, parcourroient $p\pi = Pp$, & $f\varphi = Ff$. Mais à cause de la résistance du fil & de son inextensibilité, la ligne $p\pi$ sera parcourue par le corps P dans un instant différent du pre-

Digitized by Google

mier, & dans ce même instant le corps F arrivera au point ϖ, tel que $\varpi C + C\pi = fC + Cp$.

Supposons présentement, que durant le tems que le corps P parcourt $p\pi$, il eût parcouru naturellement pi, & que le corps F eût décrit naturellement $f\omega$; que de plus, la pesanteur du corps F lui eût fait parcourir pendant ce même instant la verticale $\omega\nu$, & que la partie de la pesanteur du corps P, qui agit suivant pi, lui eût fait parcourir la ligne il. Si on prend $po = \pi l$, il faut, par notre principe, que le corps F animé de la seule force accélératrice représentée par $\varpi\nu$ fasse équilibre au corps P animé de la force po, & de la partie de sa pesanteur & de sa force centrifuge qui est perpendiculaire à la courbe Cp suivant pZ. Or en menant du point o la ligne $o\alpha$ qui rencontre Cp prolongée en α, & tirant αu, il est clair que le reste de la force suivant pZ étant anéanti par la résistance de la surface courbe, il y aura équilibre, si $F.\varpi\nu = P.p\alpha$.

Soit donc u la viteſſe du corps P, p sa pesanteur absolue, g celle du corps F, $Ff = dx$, $NP = y$, $Pp = ds$, $\pi i = \alpha$; on aura $il = \frac{pdy.ds^2}{u^2 ds}$, & $\varphi\omega : Ff :: i\pi : Pp$, c'est-à-dire $\varphi\omega = \frac{\alpha dx}{ds}$; $\omega\nu = \frac{gds^2}{u^2}$: soit $\varpi\nu = n$, on trouve $\varphi\varpi$ ou $-ddx = \frac{\alpha dx}{ds} + \frac{gds^2}{u^2} - n$; de plus,

plus, à cauſe de $F.\varpi\nu = P.p\alpha$, on a $F.n = P.\frac{po.ds}{dx}$ $= \frac{Pds}{dx}.\left(\frac{pdy.ds^2}{u^2ds} - \alpha\right)$. Donc $Fddx + \frac{Fgds^2}{u^2}$ $+ \frac{F\alpha dx}{ds} = -\frac{P\alpha ds}{dx} + \frac{Ppds^2dy}{u^2dx}$; par conſéquent

$$\alpha = \frac{-Fddx - \frac{Fgds^2}{u^2} + \frac{Ppds^2dy}{u^2dx}}{Fdx^2 + Pds^2} \times dsdx;$$ mais

$\frac{\alpha}{ds} = \frac{du}{u}$; donc $\frac{-Fu^2dxddx - Fgds^2dx + Ppds^2dy}{Fdx^2 + Pds^2}$ $= udu$; ou $2udu.\frac{(Fdx^2 + Pds^2)}{Pds^2} + \frac{2Fuudxddx}{Pds^2}$ $= 2pdy - \frac{2Fgdx}{P}$; dont l'intégrale complette (en ſuppoſant $u = o$ lorſque y & $x = o$) eſt $\frac{uu.(Pds^2 + Fdx^2)}{Pds^2} = 2py - \frac{2Fgx}{P}$; & faiſant $uu = 2pk$, on trouve $k = \frac{ds^2.\left(Py - \frac{Fgx}{p}\right)}{Pds^2 + Fdx^2}$.

On peut remarquer que $\frac{udx}{ds}$ eſt la viteſſe du corps F; car le fil étant inextenſible, le chemin du corps F à chaque inſtant eſt au chemin du corps P, comme dx eſt à ds.

Digitized by Google

COROLLAIRE I.

102. Si on fait $g = p$, on trouve $k = \frac{ds^2.(Py - Fx)}{P\,ds^2 + F\,dx^2}$, ce qui s'accorde avec la formule donnée sans démonstration par M. *Bernoulli, Tome II. des Mémoires de Petersbourg*, & peut se tirer aisément du principe de la conservation des forces vives.

COROLLAIRE II.

103. Si p & $g = o$, c'est-à-dire si les deux corps n'ont point de pesanteur, on a $\frac{uu.(P\,ds^2 + F\,dx^2)}{P\,ds^2} =$ à une constante.

COROLLAIRE III.

104. Le Problême précédent se résoudroit avec la même facilité si les deux corps étoient pesans, & qu'ils fussent mûs dans un milieu résistant comme une fonction de la vitesse. Car alors mettant dans les calculs $\frac{p\,dy}{ds} - \varphi u$ (*) au lieu de $\frac{p\,dy}{ds}$, & dans l'équation du Problême, $g + \varphi\left(\frac{u\,dx}{ds}\right)$ au lieu de g, on auroit une équation dont les indéterminées pourroient même être séparées dans quelque cas, comme quand $\varphi u = a + b\,uu$, a & b étant des constantes quel-

(*) Cette quantité φu exprime en général une fonction de u.

conques. En effet puiſque connoiſſant le lieu du corps F, on connoit auſſi celui du corps P, on a pour une ſituation quelconque des corps F, P, le rapport de dx à ds; de plus par la nature de la courbe CPp, on connoît le rapport de dy à ds; enfin ſi on fait $dx = q\,ds$, on aura $ddx = dq\,ds$, & on connoîtra de même le rapport de dq à ds. Donc ſuppoſant $dy = r\,ds$, & $dq = z\,ds$, on aura dans le cas préſent

$$2u\,du\left(\frac{F\,q\,q}{P} + 1\right) + \frac{2F\,u\,u\,q\,z\,ds}{P} = 2\,d\,s\,(p\,r - a - b\,u\,u) - \frac{2F\,q\,d\,s}{P} \times (g + a + b\,u\,u\,q\,q);$$

équation dont les indéterminées peuvent être ſéparées par les méthodes connues, en ſuppoſant la quadrature des courbes.

COROLLAIRE IV.

105. Si chacun des deux corps étoit mû ſur une courbe, alors nommant (Fig. 27) Ff, dt; Fu, dx; FN, dz, on trouveroit $\varphi\,\omega = \frac{a\,d\,t}{d\,s}$; $\omega\,r = \frac{g\,d\,z}{d\,t} \cdot \frac{d\,s^2}{u^2}$; au lieu de Fn il faudra mettre $\frac{F\,n\,d\,t}{d\,x}$ (27), & au lieu de $-d\,d\,x = \frac{a\,d\,x}{d\,s} + \frac{g\,d\,s^2}{u^2} - n$, on écrira

(27) Parce que le corps P n'a plus à faire équilibre au corps F animé de la viteſſe $\omega\,r$, mais de la viteſſe qu'il perd ſuivant la direction du fil, le reſte étant anéanti par la réſiſtance de la courbe.

Digitized by Google

COROLLAIRE I.

102. Si on fait $g = p$, on trouve $k = \frac{ds^2.(Py - Fx)}{P\,ds^2 + F\,dx^2}$, ce qui s'accorde avec la formule donnée sans démonstration par M. *Bernoulli, Tome II. des Mémoires de Petersbourg*, & peut se tirer aisément du principe de la conservation des forces vives.

COROLLAIRE II.

103. Si p & $g = o$, c'est-à-dire si les deux corps n'ont point de pesanteur, on a $\frac{uu.(P\,ds^2 + F\,dx^2)}{P\,ds^2} =$ à une constante.

COROLLAIRE III.

104. Le Problême précédent se résoudroit avec la même facilité si les deux corps étoient pesans, & qu'ils fussent mûs dans un milieu résistant comme une fonction de la viteſſe. Car alors mettant dans les calculs $\frac{p\,dy}{ds} - \varphi u$ (*) au lieu de $\frac{p\,dy}{ds}$, & dans l'équation du Problême, $g + \varphi\left(\frac{u\,dx}{ds}\right)$ au lieu de g, on auroit une équation dont les indéterminées pourroient même être séparées dans quelque cas, comme quand $\varphi u = a + b\,uu$, a & b étant des constantes quel-

(*) Cette quantité φu exprime en général une fonction de u.

Digitized by Google

conques. En effet puisque connoissant le lieu du corps F, on connoit aussi celui du corps P, on a pour une situation quelconque des corps F, P, le rapport de dx à ds; de plus par la nature de la courbe CPp, on connoit le rapport de dy à ds; enfin si on fait $dx = q\,ds$, on aura $ddx = dq\,ds$, & on connoîtra de même le rapport de dq à ds. Donc supposant $dy = r\,ds$, & $dq = z\,ds$, on aura dans le cas présent

$$2u\,du\left(\frac{F\,q\,q}{P} + 1\right) + \frac{2F\,u\,u\,q\,z\,ds}{P} = 2\,d\,s\,(p\,r - a - b\,u\,u) - \frac{2F\,q\,ds}{P} \times (g + a + b\,u\,u\,q\,q);$$

équation dont les indéterminées peuvent être séparées par les méthodes connues, en supposant la quadrature des courbes.

COROLLAIRE IV.

105. Si chacun des deux corps étoit mû sur une courbe, alors nommant (Fig. 27) Ff, dt; Fu, dx; FN, dz, on trouveroit $\varphi\omega = \frac{\alpha\,dt}{ds}$; $\omega r = \frac{g\,dz}{dt} \cdot \frac{ds^2}{u^2}$; au lieu de Fn il faudra mettre $\frac{F\,n\,dt}{dx}$ (27), & au lieu de $-ddx = \frac{\alpha\,dx}{ds} + \frac{g\,ds^2}{u^2} - n$, on écrira

(27) Parce que le corps P n'a plus à faire équilibre au corps F animé de la vitesse ωr, mais de la vitesse qu'il perd suivant la direction du fil, le reste étant anéanti par la résistance de la courbe.

Digitized by Google

$-ddt = \frac{\alpha dt}{ds} + \frac{g d\zeta}{dt} \cdot \frac{ds^2}{u^2} - n$; le Problême sera réfolu moyennant ces légers changemens, & l'on trouvera $d\left[\frac{uu.(Pds^2 + Fdt^2)}{Pds^2}\right] = 2pdy - \frac{2Fgd\zeta}{P}$. Equation qu'on pourroit trouver auſſi en ſe ſervant du principe de la conſervation des forces vives. Donc ſi la valeur primitive de u eſt zéro, & qu'alors y ſoit $= A$, & $\zeta = 0$, on aura $\frac{uu.(Pds^2 + Fdt^2)}{Pds^2} = 2p \times (y - A) - \frac{2Fg\zeta}{P}$.

COROLLAIRE V.

106. Si dans l'article précédent on fait $uu = 2pk$ & $p = g$, on aura $k = \frac{[P(y-A) - F\zeta]ds^2}{Pds^2 + Fdt^2}$. On peut, ſi l'on veut, faire $A = o$, en ſuppoſant que le corps P parte de C, & l'on aura $k = \frac{(Py - F\zeta)ds^2}{Pds^2 + Fdt^2}$.

M. *Herman*, *Tome II. des Mémoires de Péterſbourg*, a donné une ſolution du Problême que nous avons réſolu *art.* 105. Sa formule (en faiſant $A = o$) revient à $k = \frac{[Py - \int \frac{Fdx^2 d\zeta}{dt^2}]ds^2}{Pds^2 + Fdx^2} = (\text{en faiſant } dt^2 = dx^2 + dq^2) \frac{[Py - F\zeta + \int \frac{Fd\zeta dq^2}{dt^2}]ds^2}{Pds^2 + Fdx^2}$.

Digitized by Google

Or la valeur de k (en faisant $g = p$) se trouve par notre solution $\frac{2p[(Py - F\zeta).ds^2 - Fu^2dq^2]}{2p(Pds^2 + Fdx^2)}$, expression qui ne sauroit revenir au même que celle de M. *Herman*, puisque la quantité négative $-Fu^2dq^2$ ne sauroit être égale à la positive $\int\left(\frac{Fd\zeta dq^2}{dt^2}\right)ds^2$. Il y a donc lieu de croire qu'il s'est glissé quelque inadvertance dans la solution de M. *Herman*, parce que le résultat de notre solution s'accorde avec celui qu'on trouveroit par le principe de la conservation des forces vives, & que d'ailleurs elle n'est appuyée que sur des principes fort clairs (28).

SCOLIE.

107. La solution du Problême III. pourra paroître un peu longue : mais j'ai cru qu'il étoit à propos de faire

(28) Deux choses rendent fautive la solution de M. Herman.

La premiere est qu'il égale le produit de $\frac{ds}{u}$ par l'effet instantané de la force motrice d'un des corps, à la somme des quantités de mouvement que les deux corps reçoivent pendant un instant, au lieu qu'on ne doit l'égaler qu'à la quantité de mouvement que reçoit celui dont on considere la force motrice, comme on peut le voir par l'*art.* 107.

La seconde est qu'après avoir nommé u la vitesse du corps P suivant Pp, & v la vitesse du corps F suivant FC, il suppose que l'on ait $du : dv :: ds : dx$. Il est vrai que $u : v :: ds : dx$, puisque ces petites lignes sont supposées parcourues dans un même instant avec des vitesses uniformes; mais la conséquence qu'on en tire suppose que ds & dx soient constans, ou au moins que $ddx : ddx :: ds : dx$; ce qu'il n'est point permis de supposer.

Digitized by Google

voir comment mon principe s'y applique. Car si on vouloit résoudre autrement ce Problême, on pourroit s'y prendre ainsi. Soit T la tension du fil, qui agit également suivant CP & CF, on aura $\frac{Ppdy}{ds} - \frac{Tdx}{ds}$ pour la force qui accélere le corps P suivant Pp, & $\frac{Tdx}{dt} - \frac{Fgdz}{dt}$ pour celle qui accélere le corps F suivant Ff; on aura donc $\left(\frac{Ppdy}{ds} - \frac{Tdx}{ds}\right)ds = Pudu$, & $\left(\frac{Tdx}{dt} - \frac{Fgdz}{dt}\right)dt = \frac{F}{2}d\left(\frac{uudt^2}{ds^2}\right)$, d'où l'on tire en ajoûtant ces deux équations, & intégrant, $uu + \frac{uuFdt^2}{Pds^2} = 2py - \frac{2Fgz}{P}$.

Cette derniere solution est à la vérité plus simple que celle de l'article 105; mais je crois que d'un autre côté elle n'est pas tout-à-fait si lumineuse ni si directe. Car, à parler exactement, le fil n'agit point sur les corps, il n'a qu'une force de résistance, & nullement d'impulsion.

PROBLÈME IV.

108. (*) *Un corps P étant mû dans une rainure courbe* $APp\pi$, (Fig. 28) *où il est animé d'une force accélé-*

(*) Quoique ce Problême soit ici à sa véritable place eu égard à l'ordre des matieres, on peut néanmoins, si on le trouve trop compliqué, en remettre la lecture après celle du Problême VII, & de ses Corollaires.

ratrice quelconque φ, *& traînant après lui deux autres corps* M, M, *par le moyen d'une verge inflexible* MPM, *on demande la viteſſe du corps* P *& les courbes décrites par les deux corps* M, M.

Soient Pp, MR, MR les lignes décrites par les corps P, M, M durant un inſtant quelconque; je fais $p\pi = Pp = p\varpi$, & je ſuppoſe que dans l'inſtant que le corps P parcourt $p\pi$ par ſon mouvement contraint, il eût parcouru naturellement & uniformément pf, & de plus fq en vertu de la force φ; je fais de plus $Ri = MR$; Ri = MR; & je ſuppoſe que dans le même tems que le corps P parcourt $p\pi$, le corps M eût parcouru RK, & le corps M, RK. Il faut par notre principe décompoſer la force ſuivant RK en deux autres RZ, Re, & la force ſuivant RK en deux autres RZ, Re, qui ſoient telles, que ſi les corps P, M, M, n'étoient animés que des ſeules forces πq, RZ, RZ, ils ſe fiſſent équilibre & que le ſyſtême demeurât en repos, & que s'ils n'avoient que les mouvemens $p\pi$, Re, Re, ils puſſent conſerver ces mouvemens ſans ſe nuire réciproquement, c'eſt-à-dire que l'on eût $\pi e = PM$, πe = PM, & ee = MM.

Je décompoſe d'abord la force ſuivant RZ en deux autres, dont l'une RV ſoit dans le prolongement de pR, & de même la force ſuivant RZ en deux, dont l'une RV ſoit dans le prolongement de pR; & je ſuppoſe RV & RV telles, que les corps P, M, M animés des ſeules forces πq, RV, RV ſe faſſent équili-

Digitized by Google

bre, ce qui arrivera, si en imaginant ces forces réunies en p, la force unique qui en résultera est perpendiculaire à la rainure, c'est-à-dire si $P \times \pi q = \frac{M.RV.GP}{PM} + \frac{M.RV.gP}{PM}$. (A) (29).

Il ne restera plus aux corps M, M que les forces RX, RX qui doivent encore se détruire mutuellement, ce qui ne peut arriver que quand les lignes RX, RX sont dans la même droite RR, & qu'on a $M.RX = M.RX$. (B) (30).

Soit à présent $PM = a$, $GM = y$, $gM = y$, $PM = b$, la perpendiculaire constante $PQ = c$, la ligne MM ou RR, e, u la vitesse en P suivant Pp; $Pp = dx$, $\pi f = \alpha$, $RX = z$, RX = z, on aura $fq = \frac{\phi dx^2}{u^2}$, & $\pi q = \alpha + \frac{\phi dx^2}{u^2}$.

(29) Les forces suivant RV, RV sont ici décomposées en forces perpendiculaires à $p\pi$, & en forces suivant $\pi p\Gamma$: les premieres sont détruites par la rainure, ainsi les secondes doivent anéantir la force πq; or elles sont $\frac{RV \times GP}{PM}$, & $\frac{RV \times gP}{PM}$; en effet il est visible qu'on peut regarder pR comme parallèle à PM. Donc $P \times \pi q =$ &c.

(30) On pourroit demander si l'on n'est pas en droit de supposer tout de suite que RZ, RZ sont couchées sur RV, RV, & sont équilibre avec la force suivant πq, puisque ces forces doivent être détruites; pour répondre à cette question, il faut observer qu'une telle supposition entraîneroit celle-ci, que les deux corps M, M n'agissent point l'un sur l'autre, ce que la nature de la question ne permet pas de supposer; car la verge étant inflexible, & l'angle MPM constant (*hyp.*), les corps M, M sont dans le même cas, que s'ils étoient unis par une verge inflexible MM.

Si

Si du centre p on décrit l'arc $\pi\varpi$, & qu'on tire les lignes πi, πK; Ro parallèle à VK; oe sera égale & parallèle à RX (31), & nommant r le rayon osculateur en p, 1°. l'angle de pR avec PM sera $\frac{dy}{\sqrt{aa-yy}} + \frac{dx}{r}$; (32) or $\frac{\varpi i - pR}{a}$ est égal (*art.* 91) au quarré de cet angle. Donc $\varpi i - pR = a \times \left(\frac{dy}{\sqrt{(aa-yy)}} + \frac{dx}{r}\right)^2$. 2°. On aura aussi

(31) Car si on imagine ZK, cette ligne sera égale & parallèle à Re, à cause de la décomposition qui a été faite : de plus la ligne Ro est parallèle à VK par la supposition, & elle peut être censée lui être égale, parce que Ko & RV peuvent être censées parallèles, & que RV, Ko, sont infiniment petites du second ordre; donc le triangle VZK peut être censé semblable & égal au triangle Reo; donc VZ ou RX peut être censée égale & parallèle à oe.

(32) $\frac{dy}{\sqrt{aa-yy}}$ est la différentielle de l'angle GPM, & doit être égal à $\Gamma pR - GPM$; parce que l'angle GPM est considéré, non pas comme l'angle que PM fait dans toutes ses différentes positions avec la même ligne PG, mais comme l'angle que fait PM avec chaque côté Pp parcouru successivement; ensorte que l'angle GPM devient au second instant ΓpR & par conséquent $\Gamma pR - GPM = \frac{dy}{\sqrt{aa-yy}}$.

Outre cela l'angle ΓpP est $= \frac{dx}{r}$, parce que l'angle des deux côtés de la courbe est égal à l'angle que font les rayons de la développée. Or l'angle de pR avec PM est $\Gamma pR - GPM + \Gamma pP$. Donc &c.

Digitized by Google

(33) $\pi i - \varpi i = \frac{\pi\varpi . MG}{MP} = \frac{y\,dx^2}{ra}$;

r étant toujours le rayon osculateur de la courbe APp en p. 3°. Si on décrit du centre L les arcs MN, PT, & du centre π l'arc (*) iY, on aura YK ou $\pi i - \pi K = \frac{iK . RN}{MR}$, ou (à cause que $iK : MR :: \pi f : Pp$) $YK = \frac{\pi f . RN}{Pp} = \frac{\pi f . pT}{Pp}$ $= \frac{\pi f . PG}{MP} = \frac{a\sqrt{[a^2 - y^2]}}{a}$. 4°. $\pi K - \pi o = Ko = RV$, & (34) $\pi o - \pi e = \frac{oe . MQ}{MP} = \frac{z\sqrt{[a^2 - c^2]}}{a}$.

Donc $\pi e - pR$ ou $\pi e - PM = -\frac{z\sqrt{[a^2 - c^2]}}{a}$

---

(33) $\pi i - \varpi i = \frac{\pi\varpi . MG}{MP}$, parce que le triangle $\pi s\varpi$ rectangle en s est semblable au triangle MGP, πi pouvant être censée parallele à PM.

(*) L'angle πiK ne diffère qu'infiniment peu de l'angle aigu PMR, quoique cela ne paroisse guère dans la figure, où l'on a été obligé pour éviter la confusion, de faire assez grandes les lignes MR, Ri qu'on suppose infiniment petites. D'où l'on voit que l'arc iY doit tomber au-delà de iK par rapport à π, & qu'on aura un triangle iYK semblable à MRN.

(34) $\pi o - \pi e = \frac{oe \times MQ}{MP}$. Car menant et perpendiculaire à πo, la différence to des lignes πo, πt peut être prise pour $\pi o - \pi e$; or $to = \frac{oe \times MQ}{MP}$, parce que le triangle oet est semblable au triangle MQP, oe ayant été démontrée parallèle à RX ou MM, & ot l'étant à PM.

Digitized by Google

$-RV-\frac{a\sqrt{[a^2-y^2]}}{a}+\frac{y\,dx^2}{ar}+a\left(\frac{dy}{\sqrt{(aa-yy}}+\frac{dx}{r}\right)^2$; mais la ligne πe doit être $= PM$. Donc (C) $\frac{2\sqrt{[a^2-c^2]}}{a}+RV+\frac{a\sqrt{[a^2-y^2]}}{a}=\frac{y\,dx^2}{ar}+a\left(\frac{dy}{\sqrt{aa-yy}}+\frac{dx}{r}\right)^2$. On trouvera de même pour l'autre corps M, $\frac{2\sqrt{[b^2-c^2]}}{b}+RV+\frac{a\sqrt{[b^2-y^2]}}{b}=-\frac{y\,dx^2}{br}+b\left(\frac{dy}{\sqrt{(b^2-y^2)}}-\frac{dx}{r}\right)^2$. (D)

Je remarque enſuite que $\frac{MN-PT}{PM}$ eſt égal à l'angle de pR avec PM; or on a vû que cet angle eſt $\frac{dy}{\sqrt{[a^2-y^2]}}+\frac{dx}{r}$. Donc $MN=PT+PM\times\left(\frac{dy}{\sqrt{[a^2-y^2]}}+\frac{dx}{r}\right)=\frac{y\,dx}{a}+\frac{a\,dy}{\sqrt{[a^2-y^2]}}+\frac{a\,dx}{r}$. Or l'angle de ϖi avec pR eſt égal (*art.* 91) à l'angle de pR avec PM; l'angle de ϖi avec $\pi i=\frac{\pi\varpi\cdot PG}{PM^2}$; l'angle de πi avec

$\pi K = \frac{iY}{PM} = \frac{iK.MN}{MR.PM} = \frac{\pi f.MN}{Pp.MP}$; l'angle de πK ou πo avec $\pi e = \frac{oe.PQ}{PM^2} = \frac{2c}{a^2}$. Donc l'angle de πe avec ϖi (c'eſt-à-dire la différence ſeconde de l'angle de pR & PM) ſera égal à la ſomme de tous ces angles pris avec les ſignes convenables, c'eſt-à-dire qu'on aura (E) $d\left(\frac{dy}{\sqrt{[a^2-y^2]}} + \frac{dx}{r}\right) = \frac{dx^2.\sqrt{[a^2-y^2]}}{a^2r} + \frac{\alpha}{adx}\left(\frac{ydx}{a} + \frac{ady}{\sqrt{[a^2-y^2]}} + \frac{adx}{r}\right) - \frac{2c}{a^2}$: on aura de même (F) $d\left(\frac{dy}{\sqrt{[b^2-y^2]}} - \frac{dx}{r}\right) = -\frac{dx^2\sqrt{[b^2-y^2]}}{b^2r} + \frac{\alpha}{bdx}\left(\frac{ydx}{b} + \frac{bdy}{\sqrt{[b^2-y^2]}} - \frac{bdx}{r}\right) - \frac{2c}{b^2}$.

Si on met enſuite dans les équations A & B ci-deſſus, à la place des lignes qui y entrent, leurs valeurs analytiques, on aura $P\left(\alpha + \frac{\Phi dx^2}{u^2}\right) = \frac{M.RV.\sqrt{[a^2-y^2]}}{a} + M.RV.\frac{\sqrt{[b^2-y^2]}}{b}$ (G); $\frac{M}{M} = \frac{z}{z}$ (H); & enfin $\frac{\alpha}{dx} = \frac{-du}{u}$ (L).

On remarquera de plus, qu'à cauſe de l'inflexibilité de la verge, l'angle MPM eſt conſtant, de ſorte que $\frac{y}{b}$.

eſt toujours donné en $\frac{y}{a}$. Employant donc les ſept dernieres équations à chaſſer α, u, RV, RV, ζ & z, on arrivera à une équation finale qui ne contiendra plus que dx avec y, dy, ddy, & qui ſera l'équation d'une des courbes. Après quoi il ſera aiſé de trouver l'autre.

Pour ſimplifier les calculs de ce Problême, on nommera l'angle MPG, $\mathcal{C}$, & l'angle conſtant MPM, A; ce qui donnera $\frac{dy}{\sqrt{aa - yy}} = d\mathcal{C}$, $y = a$ ſin. $\mathcal{C}$, $\sqrt{aa - yy} = a$ cof. $\mathcal{C}$, $\frac{dy}{\sqrt{bb - yy}} = d(A - \mathcal{C}) = -d\mathcal{C}$; $y = b$ ſin. $(A - \mathcal{C})$, $\sqrt{bb - yy} = b$ cof. $A - \mathcal{C}$, ou, ce qui eſt la même choſe, $y = b$ ſin. A cof. $\mathcal{C} - b$ ſin. $\mathcal{C}$ cof. A, & $\sqrt{bb - yy} = b$ cof. A cof. $\mathcal{C} + b \times$ ſin. A ſin. $\mathcal{C}$. Cela poſé, on mettra d'abord dans toutes les équations, à la place de α ſa valeur $-\frac{du\,dx}{u}$, & à la place de z ſa valeur $\frac{M\zeta}{M}$; enſuite on tirera de l'équation (E) une valeur de ζ, qui étant miſe dans (C) & dans (D), donnera RV & RV; & ces valeurs de RV & de RV étant miſes dans (G), on aura une équation dont l'intégration donnera la valeur de u; mettant cette valeur de u dans l'équation (F), on aura une équation finale qui ne contiendra plus que dx & $\mathcal{C}$ avec ſes différences $d\mathcal{C}$, ddC.

Digitized by Google

Si φ étoit $= o$, on n'auroit pas besoin de la derniere équation (L) pour trouver l'équation des deux courbes; cette équation (L) ne seroit nécessaire que pour trouver la vitesse u.

REMARQUE I.

109. Si MP, PM étoient des fils, alors les forces suivant RX & RX seroient nulles, & on auroit $\zeta = o$ & $z = o$. Mais comme y ne seroit plus donné en y, on auroit six équations, & quatre inconnues α, RV, RV, & u à faire disparoître; il restera deux équations.

COROLLAIRE I.

110. Supposons pour simplifier les choses que $r = \infty$; $b = o$, $\varphi = o$; c'est-à-dire que le corps P soit dans une rainure droite & tire après lui un seul corps M, par le moyen d'une verge ou d'un fil, ce qui dans le cas présent revient au même; on aura $RV = \frac{P a \alpha}{M \sqrt{[a^2 - y^2]}}$ $= - \frac{\alpha \sqrt{[a^2 - y^2]}}{a} + \frac{a dy^2}{a^2 - y^2}$; d'où l'on tire $\alpha = \frac{M a dy^2}{\sqrt{[a^2 - y^2]}} \times \frac{a}{P aa + M(a^2 - y^2)}$, & $d\left(\frac{dy}{\sqrt{[a^2 - y^2]}}\right) = \frac{\alpha}{a dx} \times \left(\frac{ydx}{a} + \frac{ady}{\sqrt{[a^2 - y^2]}}\right)$ $= \frac{M a a dy^2}{\sqrt{[a^2 - y^2]}(P aa + M[a^2 - y^2])} \times \left(\frac{y}{aa} +\right.$

Digitized by Google

$\frac{dy}{dx\sqrt{[a^2 - y^2]}}$). Soit $dx = \frac{pdy}{a}$, & l'on trouvera après les substitutions $\frac{-dp}{p\sqrt{aa - yy}} + \frac{ydy}{(aa-yy)^{\frac{1}{2}}} - \frac{Mydy}{\sqrt{a^2 - y^2} \times [Paa + M(a^2 - y^2)]} = \frac{Ma^3 dy}{p(aa - yy)[Paa + M(a^2 - y^2)]}$. Cette équation étant multipliée par $\frac{p(aa - yy)}{\sqrt{[Paa + M(a^2 - y^2)]}}$ & ensuite intégrée, donne $\frac{-p\sqrt{[a^2 - y^2]}}{\sqrt{[Paa + M(a^2 - y^2)]}} = A + \frac{May}{\sqrt{[Paa + M(a^2 - y^2)]}(M + P)}$, A marquant une constante prise avec cette condition, que le rapport de dx à dy exprimé par $\frac{p}{a}$ soit égal au rapport donné de ces différentielles, lorsque les corps commencent à se mouvoir.

COROLLAIRE II.

111. Soit dans le Corollaire précédent, la constante $A = o$, on trouve $p = -\frac{M}{M+P} \cdot \frac{ay}{\sqrt{[a^2 - y^2]}}$, & $dx = -\frac{Mydy}{(M+P)\sqrt{[a^2 - y^2]}}$.

Cette derniere équation fait voir que dans ce cas, la

courbe cherchée eſt Géométrique. Pour la conſtruire ; on ſuppoſera que CP (Fig. 29) ſoit la poſition du fil au premier inſtant, & ayant décrit du centre P l'arc CMK, & abaiſſé d'un point quelconque M la perpendiculaire MG, on prendra $NS = GP$, puis $PO = \frac{PS.M}{M+P}$; & ayant tiré OT égale & parallèle à PM, le point T ſera un des points de la courbe. Pour en trouver l'équation par rapport aux coordonnées NQ, QT, on remarquera que $QT = MG = y$; & appellant NP, f, NQ, t, on verra que $NQ = BT = OS = \frac{P.SP}{M+P}$ $= \frac{NG \times P}{M+P} = [V(aa - yy) - f] \cdot \frac{P}{M+P}$. On a donc $t = [V(aa - yy) - f] \cdot \frac{P}{M+P}$, & $t + \frac{fP}{M+P} = \frac{P}{M+P} \times V[aa - yy]$, ce qui eſt l'équation d'une ellipſe dont le centre D ſe trouvera en faiſant $ND = \frac{NP.P}{M+P}$, & dont les deux axes ſont $DE = a$, & $DX = Cg = \frac{a.P}{M+P}$.

Donc lorſque l'impulſion primitive des corps P & M ſera telle, que le premier dx ſoit au premier dy comme $\frac{-My}{(M+P)V[^{1}-y^{1}]}$ eſt à 1, le corps M décrira une ellipſe, telle qu'on vient de la déterminer.

COROLLAIRE

COROLLAIRE III.

112. Si l'on fait $P = m.M$, la valeur générale de dx eſt $-\frac{ydy}{(1+m).V[a^2-y^2]} - \frac{A\sqrt{M}dyV[(1+m).a^2-y^2]}{V[a^2-y^2]}$, ce qui fait voir que ſi A n'eſt pas $= o$, la courbe à la vérité n'eſt pas Géométrique, mais peut ſe conſtruire par la rectification de l'ellipſe. Car $\frac{dyV[(1+m)a^2-y^2]}{V[a^2-y^2]} = \frac{dyV[(1+m).qa^2-qy^2]}{V\overline{q}.V[a^2-y^2]}$: or la formule générale de l'élément de l'ellipſe étant $\frac{dyV[a^2+\left(\frac{p}{2a}-1\right).y^2]}{V[a^2-y^2]}$; ſi on fait $(1+m).q = 1$, & $-q = \frac{p}{2a} - 1$, on trouvera $q = \frac{1}{1+m}$ & $\frac{p}{2a} = \frac{m}{1+m}$; d'où il s'enſuit que $\frac{dyV[(1+m)a^2-y^2]}{V[a^2-y^2]}$ eſt l'élément d'un arc d'ellipſe, dont l'abſciſſe eſt y, le grand axe $= 2a$, & le rapport du parametre à cet axe, $\frac{m}{1+m}$, cet arc étant diviſé par $V\overline{q}$ ou multiplié par $V[1+m]$; ou, ce qui revient à la même choſe, c'eſt l'élément d'un arc d'ellipſe dont le grand axe $= 2aV[1+m]$, l'abſciſſe $= yV[1+m]$, & le rapport du parametre à l'axe $= \frac{m}{1+m}$.

REMARQUE II.

113. Ce que nous venons de dire dans les deux Corollaires précédens, & qui a été déduit du Problême général, peut se déduire d'une maniere plus simple de deux Théorêmes donnés au commencement de cette seconde Partie (*art.* 83 & 84); savoir que le centre de gravité g des corps P, M, (Fig. 30) descend dans une ligne droite perpendiculaire à la rainure PQ, ou au moins que son mouvement parallèlement à PQ est uniforme. Car quand le centre g descendra dans une ligne droite SgV, on sait par les sections coniques, que le point M décrira une ellipse; & dans les autres cas, il n'y a qu'à imaginer que le point g descende dans une droite perpendiculaire à la rainure, tandis que le point P avance vers Q, & que le point M décrit une ellipse, & faire mouvoir ensuite tout le système parallèlement à PQ, avec la viteſſe uniforme que doit avoir le centre de gravité parallèlement à PQ. Il est à remarquer que tout ceci a lieu, même lorsque les corps P, M, sont pesans, pourvû que la rainure PQ soit alors horizontale.

Soient PQ, MN les viteſſes primitivement imprimées aux corps P, M; on décomposera la viteſſe MN en deux autres, dont l'une MR soit perpendiculaire, & l'autre MS parallèle à la rainure, & on prendra sur RN la partie RT telle, que $M.RT = P.PQ$; $\frac{TN \times M}{M+P}$ sera la viteſſe du centre de gravité parallèlement à PQ;

Digitized by Google

& le Problême ſera entiérement réſolu, ſi, abſtraction faite de la viteſſe commune $\frac{TN \times M}{M + P}$, on trouve la viteſſe du point M dans ſon ellipſe & celle du point P. C'eſt ce qu'on trouvera facilement par le principe de la conſervation des forces vives, que nous démontrerons ci-après. Voilà, comme l'on voit, une Méthode bien ſimple pour réſoudre ces Problêmes.

Remarque III.

114. Si au lieu de ſuppoſer le corps P animé d'une force accélératrice φ, on ſuppoſoit qu'il fût contraint de ſe mouvoir ſur la courbe APp (Fig. 28) avec une viteſſe dont la loi fût donnée, le Problême pourroit toujours ſe réſoudre de la même façon. Il ne ſeroit queſtion que de déterminer la force φ. *Voyez l'article 96 ci-deſſus.*

PROBLÊME V.

115. *Un fil* C m M *fixe en* C, (Fig. 31) *& chargé de deux poids* m, M, *étant infiniment peu éloigné de la verticale* C O, *trouver la durée des oſcillations de ce fil.*

Soit mu l'arc parcouru pendant le premier inſtant par le corps m, & Mv l'arc décrit dans le même tems par le corps M. On peut regarder le corps M comme ayant à la fois deux mouvemens, dont l'un MV eſt égal & parallèle au mouvement mu du corps m, & l'autre Vv eſt un mouvement circulaire autour du centre m ou u. Nous décompoſerons d'abord l'effort abſolu de la peſan-

Digitized by Google

teur du corps m ſuivant mQ, en deux autres, dont l'un ſoit capable de faire parcourir au corps m la ligne mu dans le premier inſtant, & l'autre ſoit dirigé ſuivant la ligne mR dont la poſition eſt inconnue. Ce dernier effort doit être détruit, puiſque (*hyp.*) le corps m ne peut ſe mouvoir que ſuivant mu. Nous décompoſerons de même l'effort abſolu de la peſanteur du corps M ſuivant ML, en deux autres, dont l'un faſſe parcourir au corps M la ligne MV, & l'autre MN puiſſe ſe décompoſer de nouveau en deux autres, dont l'un faſſe parcourir au corps M la ligne Vv, l'autre ſoit entiérement détruit, ou, ce qui revient au même, faſſe équilibre avec l'effort ſuivant mR qui doit s'anéantir auſſi. Or il eſt néceſſaire pour cela 1°. que l'effort du corps M qui doit être détruit, ſoit dirigé ſuivant MP dans la direction de mM prolongée; 2°. que cet effort ſoit à l'effort ſuivant mR, comme l'angle infiniment petit SmR (fait par mR & Cm prolongée), eſt à l'angle MmS (35), parce qu'il faut pour l'équilibre que la force réſultante du concours de ces deux efforts ſoit dirigée ſuivant mS. Cela poſé,

Soit $Cm = l$, p la peſanteur du corps m, P celle du

(35) La force réſultante & les deux forces compoſantes ſont, comme on l'a vû, repréſentées par la diagonale & les côtés d'un parallélogramme fait ſur leurs directions, d'où il eſt aiſé de conclure qu'elles ſont auſſi repréſentées chacune par le ſinus de l'angle compris entre les directions des deux autres; mais quand les angles ſont infiniment petits ils ſont dans le rapport de leurs ſinus. Donc &c.

Digitized by Google

corps M, $Mm = L$, $mK = x$, $MQ = y$, φ la force accélératrice suivant mu; on aura 1°. la force φ à la pesanteur p, comme l'angle RmQ est au sinus de l'angle droit Rmu. Donc nommant le sinus total 1, on aura l'angle $RmQ = \frac{\varphi}{p}$. 2°. On trouvera de même l'angle $NML = \frac{\Phi}{P}$: donc l'angle $PNM = \frac{y}{L} - \frac{\Phi}{P}$, & la force accélératrice suivant $Vv = P\left(\frac{y}{L} - \frac{\Phi}{P}\right)$; mais l'effort du corps M suivant MP, qui ne differe qu'infiniment peu de son effort suivant ML, & qui peut par conséquent s'exprimer par $M \times P$, doit être à l'effort du corps m suivant mR ($m \times p$) :: l'angle RmS ou $\frac{x}{l} - \frac{\Phi}{p}$ est à l'angle MmS ou $\frac{y}{L} - \frac{x}{l}$; donc $m \cdot \varphi = \frac{mpx}{l} - M.P \times \left(\frac{y}{L} - \frac{x}{l}\right)$, & par conséquent $\varphi = \frac{px}{l} - \frac{M.P}{m}\left(\frac{y}{L} - \frac{x}{l}\right)$, & l'effort suivant Vv sera $\frac{Py}{L} - \frac{px}{l} + \frac{M.P}{m}\left(\frac{y}{L} - \frac{x}{l}\right)$.

Si on nomme présentement t le tems écoulé depuis le commencement du mouvement, on a (*art.* 20) les équa-

tions (K) $-ddx = \left[\frac{px}{l} - \frac{M.P}{m}\left(\frac{y}{L} - \frac{x}{l}\right)\right]dt^2$ (36),

& $-ddy = \left[\frac{yP}{L}\cdot\frac{(M+m)}{m} - \frac{x}{l}\cdot\left(p + \frac{M.P}{m}\right)\right]dt^2$ (N).

Ce ſont ces deux équations qui ſerviront à déterminer le mouvement de chaque corps.

COROLLAIRE I.

116. Si on ſuppoſe que les forces initiales ſuivant mu & Vv ſoient entr'elles, comme mK à MQ; c'eſt-à-dire ſi

(O) $\frac{px}{l} + \frac{MPx}{lm} - \frac{MPy}{Lm} : \frac{yP}{L}\left(\frac{M+m}{m}\right) - \frac{x}{l}\left(p + \frac{M.P}{m}\right) :: x : y$;

je dis que les corps M, m, arriveront dans le même tems à la verticale CO. Car il faut pour cela que les arcs MQ, mK ſoient parcourus dans le même tems: or ſi l'analogie précédente a lieu, les petites parties dont les arcs mK, MQ diminueront au premier inſtant & dans les ſuivans, ſeront entr'elles comme ces arcs, & les forces accélératrices ſeront toujours entr'elles comme les arcs qui reſteront à parcourir juſqu'au point de repos. Donc &c.

L'analogie (O) étant réduite en équation donne

$$\frac{pxy}{l} + \frac{MPxy}{lm} - \frac{MPyy}{Lm} = \frac{yxP}{L}\cdot\left(\frac{M+m}{m}\right) - \frac{xx}{l}\left(p + \frac{M.P}{m}\right)$$

ou $\frac{y}{x} + \frac{M+m}{2M} - \frac{pLm}{2MPl} - \frac{L}{2l} = \pm\sqrt{\left[\frac{pLm}{MPl} + \frac{L}{l} + \left(\frac{M+m}{2M} - \frac{pLm}{2MPl} - \frac{L}{2l}\right)^2\right]}$,

& $\frac{y+x}{x} = \frac{-m+M}{2M} + \frac{pLm}{2PMl} + \frac{L}{2l} \pm \sqrt{\left[\frac{pLm}{MPl} + \frac{L}{l} + \left(\frac{M+m}{2M} - \frac{pLm}{2MPl} - \frac{L}{2l}\right)^2\right]}$.

(36) On donne ici le ſigne — à ddx & ddy, quoique le mouvement ſoit accéléré; mais il faut faire attention que t croiſſant, x & y diminuent.

Digitized by Google

COROLLAIRE II.

117. Si $P = p$, c'eſt-à-dire ſi les corps M & m ſont de même gravité ſpécifique, on aura $\frac{y+x}{x} = \frac{Ml - ml + ML + mL}{2Ml} \pm \frac{\sqrt{[4MmLl + 4MMLl + (Ml + ml - ML - mL)^2]}}{2Ml}$: la quantité qui eſt ſous le ſigne radical ſe peut changer en $\sqrt{[4MmLL + (ml + ML + Ml - mL)^2]}$, & alors le rapport de $y + x$ à x ſera préciſément le même qui a été donné pour ce cas ſeulement, par M. *Dan. Bern. Mém. de Péterſbourg, Tome VI. p.* 111. Cet Auteur en a donné enſuite la démonſtration dans le Tome VII. des mêmes Mémoires. M. *Euler* a donné auſſi dans le Tome VIII. une ſolution de ce même Problême. Comme il eſt curieux, & qu'il peut ſervir à en réſoudre pluſieurs autres ſemblables, j'ai cru devoir montrer comment mon principe s'y applique. Au reſte je ferai voir plus bas qu'il y a d'autres cas que celui-ci, où les deux corps arrivent toujours en même tems à la ligne verticale CO.

COROLLAIRE III.

118. Si la ſituation du fil CMm au commencement du mouvement, n'eſt pas celle qui eſt indiquée dans le Corollaire qui précede, ou ſi en général cette ſituation eſt quelconque, il faut recourir en ce cas à l'intégration

Digitized by Google

des équations (K) & (N) de l'*art.* 115. pour trouver le mouvement des corps m & M. Je suppoſerai d'abord, pour rendre les calculs les plus ſimples qu'il ſera poſſible, non-ſeulement $P = p$, mais encore $M = m$ & $l = L$; de plus, pour rendre les équations (K) & (N) homogenes, je ſuppoſerai que T ſoit le tems pendant lequel la force accélératrice p feroit parcourir au corps m ou M un eſpace $= l$; de cette maniere les équations (K) & (N) ſeront changées en celle-ci : (P) $-ddx = (2x - y) \cdot \frac{2dt^2}{T^2}$, & (Q) $-ddy = (2y - 2x) \frac{2dt^2}{T^2}$ (*art.* 27).

Pour intégrer ces équations, je me ſers de la Méthode que j'ai donnée dans les *Mémoires de l'Académie des Sciences de Pruſſe*, année 1748. & ailleurs. Je multiplie la ſeconde par un coefficient indéterminé r, & enſuite je les ajoûte enſemble, ce qui donne $-ddx - r\,ddy = \frac{2dt^2}{T^2} \times \left(\overline{2 - 2r} \cdot x + \overline{2r - 1} \cdot y \right) \ldots$. (R). Je fais enſorte que $(2 - 2r)x + (2r - 1)y$ ſoit un multiple de $-x - ry$, ce qui donne $2 - 2r = \frac{2r - 1}{r}$; & $r = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}$; donc faiſant $x + ry = u$, ou plutôt $x + \frac{y}{\sqrt{2}} = u$, & $x - \frac{y}{\sqrt{2}} = u'$, on aura les deux équations $-ddu = (2 - \sqrt{2}) \cdot \frac{2udt^2}{T^2}$,

&

& $-ddu' = (2+\sqrt{2}) \cdot \frac{2u'dt^2}{T^2}$; multipliant la 1ere par du, on a l'intégrale $\frac{du^2}{AA-uu} = (4-2\sqrt{2})\frac{dt^2}{T^2}$; d'où l'on tire $\frac{-du}{\sqrt{AA-uu}} = \frac{dt}{T}\sqrt{4-2\sqrt{2}}$, parceque t croissant, u diminue ; donc $u = A$ cos. $\frac{t\sqrt{4-2\sqrt{2}}}{T}$, & $u' = B$ cos. $\frac{t\sqrt{4+2\sqrt{2}}}{T}$, intégrales qui sont complettes, parce que dx & dy étant $= 0$ lorsque $t = 0$, il faut que du & du' soient $= 0$ lorsque $t = 0$; de-là on tirera les valeurs de x & de y, & on déterminera les constantes A & B par les valeurs connues & données de x & de y lorsque $t = 0$.

REMARQUE I.

119. Si l'on cherche dans le cas que nous venons d'examiner au Corollaire précédent, c'est-à-dire lorsque $P = p$, $M = m$ & $L = l$, quel doit être le rapport des lignes X, Y pour que les corps m, M arrivent dans le même tems à la verticale, on trouvera (*art.* 116) $2X - Y : 2Y - 2X :: X : Y$; donc $YY = 2XX$, & $\frac{Y}{X} = \pm\sqrt{2}$, la même valeur qu'on a trouvée pour $\frac{1}{g}$. En effet, pour peu qu'on fasse d'attention à la nature du Problême, on verra que quand il y a deux corps

Digitized by Google

m, M, les deux valeurs de $\frac{1}{\nu}$ doivent être les mêmes que celles que doit avoir $\frac{-Y}{X}$, pour que les poids m, M arrivent tous deux en même-tems à la verticale. Car lorsque les deux corps arrivent en même-tems à la verticale, le rapport de x à y, de dx à dy & de ddx à ddy est toujours constant & égal au rapport de X à Y. Or supposons dans ce cas l'indéterminée ν telle que $\frac{1}{\nu} = -\frac{Y}{X}$; il est clair que dans l'équation $-ddx - \nu ddy = ([2-2\nu].x + [2\nu-1].y)\frac{2dt^2}{T^2}$, le premier membre sera zéro; & par conséquent le second devra l'être aussi; ce qui arrivera, ou si l'on a $\frac{2-2\nu}{2\nu-1} = -\frac{y}{x} = -\frac{Y}{X} = \frac{1}{\nu}$, ou bien si on a à la fois $2-2\nu = 0$, & $2\nu - 1 = 0$. Or ce dernier cas renfermant contradiction, il s'ensuit que l'équation qui donne la valeur de ν lorsque $\frac{1}{\nu} = -\frac{Y}{X}$, est $\frac{2-2\nu}{2\nu-1} = \frac{1}{\nu}$, la même précisément qu'on a trouvée ci-dessus en général, lorsque le rapport de Y à X est quelconque. Donc dans cette derniere équation, la valeur négative de $\frac{1}{\nu}$ doit être égale à la positive de l'équation qui donne le rapport de Y à X, & la positive à la négative.

Digitized by Google

REMARQUE II.

120. On ſent aſſez que le raiſonnement de l'article précédent peut s'appliquer au cas où l'on n'a ni $P = p$, ni $M = m$, ni $L = l$; & en effet, ſi l'on veut prendre la peine de faire le calcul, on verra que l'équation étant ordonnée par rapport à $\frac{1}{y}$, elle ne différera que par le ſigne du ſecond terme, de l'équation ordonnée par rapport à $\frac{Y}{X}$.

Car en général les équations (K), (N) de l'article 115, peuvent être repréſentées par $ddx = (ax + by).dt^2$, & $ddy = (cx + ey).dt^2$. Or pour que les corps arrivent en même-tems à la verticale, il faut que $ax + by : cx + ey :: x : y$, & pour avoir la valeur de $\frac{1}{y}$, il faut que $a + cy = \frac{b + ey}{y}$. Les deux équations ordonnées, l'une par rapport à $\frac{y}{x}$, l'autre par rapport à $\frac{1}{y}$, ne different que par le ſigne du ſecond terme.

Il eſt aiſé de voir que la quantité qui eſt ſous le ſigne radical dans la valeur de $\frac{y}{x}$ (*art.* 116), eſt toujours réelle. Ainſi les racines de cette équation ne ſeront jamais égales; donc l'équation en y ayant les mêmes ra-

Digitized by Google

cines en ſigne contraire que l'équation en $\frac{y}{x}$, il ſenſuit que v n'aura jamais deux racines égales. On peut voir encore très-aiſément que la quantité radicale eſt toujours plus grande que l'autre; d'où il s'enſuit que jamais $\frac{y}{x}$ n'aura une valeur $= o$, ni par conſéquent $\frac{x}{y}$.

REMARQUE III.

121. Au reſte, je n'ai conſidéré dans la ſolution du Problême précédent, le mouvement du poids M, comme compoſé de deux mouvemens, dont l'un MV lui eſt commun avec le poids m, l'autre Vv eſt un mouvement de rotation autour de m comme centre, que pour préparer le Lecteur à la ſolution de quelques Problêmes qui ſuivront, & que cette conſidération rend beaucoup plus aiſés à réſoudre. Car on auroit pû décompoſer d'abord l'action de la peſanteur M ſuivant ML, en deux autres, dont l'une produisît le mouvement Mv du corps M, l'autre ſuivant MP fût détruite. De cette maniere on eût eu la force accélératrice ſuivant $Mv = \grave{a}\ p \times \text{ſin. } LMP = \frac{Py}{L}$; l'angle $SmR = \frac{SmM \times P.M}{p.m} = \left(\frac{y}{L} - \frac{x}{l}\right) \times \frac{P.M}{p.m}$; donc l'angle RmQ auroit été $= \frac{x}{l} - \left[\left(\frac{y}{L} - \frac{x}{l}\right) \times \frac{P.M}{p.m}\right]$, & par conſéquent la force accélératrice ſui-

vant mu auroit été le produit de p par cette derniere quantité. Ainſi comme x eſt l'eſpace que cette derniere force accélératrice tend à faire parcourir au corps m, & $x + y$ celui que la force accélératrice totale du corps M tend à lui faire décrire, on auroit eu $-ddx = \left[\frac{px}{l} - \frac{M.P}{m}\left(\frac{y}{L} - \frac{x}{l}\right)\right]dt^2$, & $-ddx - ddy = \left[\frac{Py}{L}\right]dt^2$; deux équations, dont la premiere eſt la même que l'équation (K) de l'article 115, & dont l'autre n'eſt autre choſe que les équations (K) & (N) de ce même article ajoûtées enſemble. Cette ſolution par conſéquent revient au même que celle que nous avons donnée *art.* 115.

REMARQUE IV.

122. Si on appelle x, y les diſtances des deux corps à la verticale, qui dans la Remarque précédente étoient x & $y + x$, on aura les équations du mouvement des deux corps en mettant dans celles de l'article précédent y au lieu de $x + y$; & par conſéquent $y - x$ au lieu de y. Soit de plus $P = p$, a l'eſpace qu'un corps peſant parcourroit librement en tombant durant le tems T, $\Delta = 2a\left(\frac{1}{l} + \frac{M}{lm} + \frac{M}{Lm}\right)$, $\Gamma = -\frac{2aM}{Lm}$, $\varphi = -\frac{2a}{L}$, $\Pi = \frac{2a}{L}$; on aura (*art.* 118) pour les équations générales du mouvement des deux corps,

cines en ſigne contraire que l'équation en $\frac{y}{x}$, il ſenſuit que v n'aura jamais deux racines égales. On peut voir encore très-aiſément que la quantité radicale eſt toujours plus grande que l'autre; d'où il s'enſuit que jamais $\frac{y}{x}$ n'aura une valeur $= o$, ni par conſéquent $\frac{x}{y}$.

REMARQUE III.

121. Au reſte, je n'ai conſidéré dans la ſolution du Problême précédent, le mouvement du poids M, comme compoſé de deux mouvemens, dont l'un MV lui eſt commun avec le poids m, l'autre Vv eſt un mouvement de rotation autour de m comme centre, que pour préparer le Lecteur à la ſolution de quelques Problêmes qui ſuivront, & que cette conſidération rend beaucoup plus aiſés à réſoudre. Car on auroit pû décompoſer d'abord l'action de la peſanteur M ſuivant ML, en deux autres, dont l'une produiſît le mouvement Mv du corps M, l'autre ſuivant MP fût détruite. De cette maniere on eût eu la force accélératrice ſuivant $Mv = \grave{a}\ p \times \text{ſin. } LMP = \frac{Py}{L}$; l'angle $SmR = \frac{SmM \times P.M}{p.m} = \left(\frac{y}{L} - \frac{x}{l}\right) \times \frac{P.M}{p.m}$; donc l'angle RmQ auroit été $= \frac{x}{l} - \left[\left(\frac{y}{L} - \frac{x}{l}\right) \times \frac{P.M}{p.m}\right]$, & par conſéquent la force accélératrice ſui-

vant mu auroit été le produit de p par cette derniere quantité. Ainſi comme x eſt l'eſpace que cette derniere force accélératrice tend à faire parcourir au corps m, & $x + y$ celui que la force accélératrice totale du corps M tend à lui faire décrire, on auroit eu $-ddx = \left[\frac{Px}{l} - \frac{M.P}{m}\left(\frac{y}{L} - \frac{x}{l}\right)\right]dt^2$, & $-ddx - ddy = \left[\frac{Py}{L}\right]dt^2$; deux équations, dont la premiere eſt la même que l'équation (K) de l'article 115, & dont l'autre n'eſt autre choſe que les équations (K) & (N) de ce même article ajoûtées enſemble. Cette ſolution par conſéquent revient au même que celle que nous avons donnée *art.* 115.

REMARQUE IV.

122. Si on appelle x, y les diſtances des deux corps à la verticale, qui dans la Remarque précédente étoient x & $y + x$, on aura les équations du mouvement des deux corps en mettant dans celles de l'article précédent y au lieu de $x + y$, & par conſéquent $y - x$ au lieu de y. Soit de plus $P = p$, a l'eſpace qu'un corps peſant parcourroit librement en tombant durant le tems T, $\Delta = 2a\left(\frac{1}{l} + \frac{M}{lm} + \frac{M}{Lm}\right)$, $\Gamma = -\frac{2aM}{Lm}$, $\varphi = -\frac{2a}{L}$, $\Pi = \frac{2a}{L}$; on aura (*art.* 118) pour les équations générales du mouvement des deux corps,

$$-ddx = (\Delta x + \Gamma y)\frac{dt^2}{T^2},$$

$$-ddy = (\varphi x + \Pi y)\frac{dt^2}{T^2}.$$

Et en suivant précisément la méthode de l'article 118, on trouvera que les deux valeurs de ν sont $\nu = \frac{-\Delta + \Pi \pm \sqrt{\Pi - \Delta^2 + 4\Gamma\varphi}}{2\varphi}$. Appellons ν, ν' ces deux valeurs, on aura $u = A \cos. \frac{t}{T}\sqrt{\Delta + \nu\varphi}$; $u' = B \cos. \frac{t}{T}\sqrt{\Delta + \nu'\varphi}$; $x = \frac{\nu' u - \nu u'}{\nu' - \nu}$; $y = \frac{u - u'}{\nu - \nu'}$; d'où il s'ensuit que si on nomme α & ζ les valeurs de x & de y lorsque $t = 0$, on aura $A = \alpha + \nu\zeta$, $B = \alpha + \nu'\zeta$,

$$x = \frac{(\nu'\alpha + \nu\nu'\zeta)\cos. \frac{t}{T}\sqrt{\Delta + \nu\varphi}}{\nu' - \nu} - \frac{(\nu\alpha + \nu\nu'\zeta)\cos. \frac{t}{T}\sqrt{\Delta + \nu'\varphi}}{\nu' - \nu}; \text{ \&}$$

$$y = \frac{(\alpha + \nu\zeta)\cos. \frac{t}{T}\sqrt{\Delta + \nu\varphi}}{\nu - \nu'} - \frac{(\alpha + \nu'\zeta)\cos. \frac{t}{T}\sqrt{\Delta + \nu'\varphi}}{\nu - \nu'}.$$

Digitized by Google

De là il eſt facile de trouver une conſtruction qui donne la valeur de x & de y; car ſoit $x = G$ cof. $pt + rG$ cof. qt; $y = H$ cof. $pt + N$ cof. qt; ſoient décrits (fig. 32) des arcs de cercle des rayons $CA = G$, $CD = H$, $CB = N$, on aura (en faiſant l'angle $ACL = pt$, & l'angle $ACF = qt$) $x = CZ + r.CG$, & $y = \frac{CZ \times CD}{CA} + \frac{CG \times CB}{CA} = CA' + CO$.

J'avois donné dans la premiere Edition de cet Ouvrage une autre ſolution du même Problême; mais celle-ci eſt beaucoup plus ſimple.

Si l'on a $\alpha + \nu\mathfrak{G} = 0$, ou $\alpha + \nu'\mathfrak{G} = 0$, c'eſt-à-dire $\frac{\mathfrak{G}}{\alpha} = \frac{-1}{\nu}$ ou $\frac{-1}{\nu'}$, ce qui eſt le cas des *art.* 116 & 120; alors les valeurs de x & de y ſeront exprimées chacune par un ſeul terme, & ces valeurs ſeront toujours en raiſon conſtante; ce qui s'accorde avec ce qui a été remarqué dans l'article 116.

On peut remarquer encore que ce cas eſt le ſeul où les valeurs de x & de y ſe réduiſent à un ſeul terme. Car (*art.* 120) on ne peut jamais ſuppoſer ni $\nu = 0$, ni $\nu' = 0$, ni $\nu = \nu'$. Donc il n'y a que le cas de $\alpha + \nu\mathfrak{G} = 0$, ou celui de $\alpha + \nu'\mathfrak{G} = 0$, qui puiſſe rendre nul un des termes de la valeur de x; il en eſt de même de celle de y.

Comme les quantités ν, ν', ne ſont jamais égales

(*art.* 120) on voit encore que x & y ne peuvent jamais être en raiſon conſtante, tant que ces quantités ſont compoſées de deux termes, c'eſt-à-dire tant que l'on n'a pas $\alpha + \nu' \mathfrak{G} = 0$, ou $\alpha + \nu' \mathfrak{G} = 0$.

On peut obſerver enfin que jamais un des termes de la valeur de x & de celle de y ne deviendra conſtant; car il faudroit pour cela que $\Delta + \nu \varphi$, ou $\Delta + \nu' \varphi$ fût $= 0$; ce qui donneroit $\frac{\Delta}{\varphi} = \frac{\Gamma}{\Pi}$, ou $\frac{L}{l} + \frac{L.M}{l\,m} + \frac{M}{m} = \frac{M}{m}$; équation impoſſible.

REMARQUE V.

123. Le Lecteur peut comparer cette ſolution avec celle que M. Daniel Bernoulli a donnée du même Problême dans les *Mémoires de l'Académie Royale des Sciences de Pruſſe*, pour l'année 1753. & juger laquelle des deux eſt la plus ſimple, & ſurtout la plus directe.

Je me contenterai de dire que l'on remarque aiſément dans les valeurs de x & de y trouvées ci-deſſus, la double oſcillation, que M. Bernoulli a obſervée dans le mouvement du pendule dont il s'agit; chacune de ces oſcillations eſt repréſentée par chacun des deux termes de la valeur de x & de celle de y. En effet l'équation du mouvement d'un pendule ſimple de longueur λ, eſt $- d\,d\,z = \frac{2\,a\,z\,d\,t^2}{\lambda\,T^2}$, ou $z = K \times$ cof.

cos. $\frac{t}{T}\sqrt{\frac{2a}{\lambda}}$; d'où il est facile de voir que les mouvemens des corps M, m sont composés de deux mouvemens, synchrones chacun à celui d'un pendule simple. On peut en voir le détail, si on le croit nécessaire, dans le *Mémoire* de M. *Bernoulli*, auquel il suffit de renvoyer. Mais ce qu'il est important de remarquer, & ce que M. Bernoulli, ce me semble, auroit dû faire, c'est que les deux *oscillations* dont il s'agit, ne sont qu'improprement nommées de la sorte, parce qu'une de ces oscillations se fait par rapport à un point mobile qui oscille lui-même; ainsi les deux oscillations doivent réciproquement s'altérer & se dénaturer, pour ainsi dire; ensorte qu'une partie infiniment petite d'oscillation, qui se fera, par exemple, de gauche à droite par rapport au point mobile, se fera réellement de droite à gauche dans l'espace absolu, si dans ce moment la viteſſe d'oscillation du point mobile est plus grande, & dirigée de droite à gauche; c'est pourquoi il n'y a point proprement dans le pendule une double oscillation, mais une seule par rapport à l'espace absolu. Il est vrai que les oscillations *absolues* des deux corps ne se feront pas toujours en même tèms, que l'un pourra faire dans le même tems plus d'oscillations que l'autre; mais chacun en particulier ne fera réellement que des oscillations simples.

Remarque VI.

124. Les oscillations du corps m finiront lorsque dx

ſera = 0, & celles du corps M lorſque $dy = 0$; car alors la viteſſe ſera nulle; ainſi les oſcillations du corps m finiront,

1°. Lorſqu'on aura à la fois ſin. $\frac{t}{T}\sqrt{\Delta + \nu\varphi} = 0$, & ſin. $\frac{t}{T}\sqrt{\Delta + \nu'\varphi} = 0$. Or cela arrivera lorſque $\sqrt{\Delta + \nu\varphi}$ ſera à $\sqrt{\Delta + \nu'\varphi}$ comme nombre à nombre, & lorſque t ſera tel que $\frac{t}{T}\sqrt{\Delta + \nu\varphi}$, & $\frac{t}{T}\sqrt{\Delta + \nu'\varphi}$ feront un multiple de 180 degrés. Car alors chacun des ſinus de ces angles ſera = 0.

2°. Lorſque l'on aura $\frac{\text{ſin. } \frac{t}{T}\sqrt{\Delta + \nu'\varphi}}{\text{ſin. } \frac{t}{T}\sqrt{\Delta + \nu\varphi}} = \frac{\sqrt{\Delta + \nu\varphi} \cdot \nu' \cdot (\alpha + \nu C)}{\sqrt{\Delta + \nu'\varphi} \cdot \nu \cdot (\alpha + \nu' C)}$. Cette ſeconde équation ſeule aura lieu lorſque $\sqrt{\Delta + \nu''\varphi}$, & $\sqrt{\Delta + \nu\varphi}$ ne ſeront pas comme nombre à nombre.

De même les oſcillations du corps M finiront,

1°. Lorſque t aura la valeur déſignée dans le premier des deux cas précédens.

2°. Lorſque l'on aura $\frac{\text{ſin. } \frac{t}{T}\sqrt{\Delta + \nu'\varphi}}{\text{ſin. } \frac{t}{T}\sqrt{\Delta + \nu\varphi}} = \frac{\sqrt{\Delta + \nu\varphi}\,(\alpha + \nu C)}{\sqrt{\Delta + \nu'\varphi}\,(\alpha + \nu' C)}$.

Digitized by Google

Donc 1°. lorſque l'on aura $\nu'\alpha + \nu\nu'\mathfrak{G} = 0$, & $\alpha + \nu\mathfrak{G} = 0$, ce qui ſe réduit à $\alpha + \nu\mathfrak{G} = 0$, toutes les oſcillations des deux corps finiront en même tems; il en eſt de même ſi $\alpha + \nu'\mathfrak{G} = 0$. Il eſt aiſé de voir (*art.* 120) que ces deux cas ſont celui de l'article 116.

2°. Lorſque $\sqrt{\Delta + \nu\varphi}$, & $\sqrt{\Delta + \nu'\varphi}$ ne feront pas comme nombre à nombre, les vibrations des corps M & m ne finiront jamais en même tems. Car la valeur de $\frac{\text{ſin.}\ \frac{t}{T}\sqrt{\Delta + \nu'\varphi}}{\text{ſin.}\ \frac{t}{T}\sqrt{\Delta + \nu\varphi}}$ pour le corps m eſt à la valeur de la même quantité pour le corps M, comme ν' eſt à ν. Or ν' n'eſt jamais égale à ν (*art.* 120). Donc il eſt impoſſible que la même valeur de t rende à la fois $dx = 0$, & $dy = 0$.

3°. Si $\sqrt{\Delta - \nu\varphi}$, & $\sqrt{\Delta + \nu'\varphi}$ ſont entr'eux comme nombre à nombre, quelques oſcillations des deux corps finiront en même tems, ſavoir lorſqu'on aura à la fois ſin. $\frac{t}{T}\sqrt{\Delta + \nu\varphi} = 0$, & ſin. $\frac{t}{T}\sqrt{\Delta + \nu'\varphi} = 0$; mais ſi les deux équations qui donnent la valeur de $\frac{\text{ſin.}\ \frac{t}{T}\sqrt{\Delta + \nu'\varphi}}{\text{ſin.}\ \frac{t}{T}\sqrt{\Delta + \nu\varphi}}$ ont une ſolution poſſible, ou ſi une des deux ſeulement eſt dans ce cas; alors toutes les oſcillations des deux corps ne finiront pas en même tems. Il eſt à remarquer que la

Digitized by Google

ſolution des équations précédentes ſera impoſſible, non-ſeulement ſi l'inconnue a une valeur imaginaire, mais ſi elle a une valeur (poſitive ou négative) plus grande que l'unité, parceque le ſinus d'un angle quelconque ne peut être plus grand que le ſinus total. Si une des deux équations ſeulement a une ſolution poſſible, celui des deux corps à qui elle appartiendra (par exemple m) fera plus de vibrations que l'autre; mais toutes les fois qu'une vibration du corps M ceſſera, il y aura une vibration ceſſante dans le corps m.

4°. Enfin toutes les oſcillations des deux corps finiront en même tems, ſi $\sqrt{\Delta + \nu\varphi}$, & $\sqrt{\Delta + \nu'\varphi}$ ſont entr'eux comme nombre à nombre, & ſi les deux équations qui donnent la valeur de $\frac{\text{ſin.}\frac{t}{T}\sqrt{\Delta+\nu'\varphi}}{\text{ſin.}\frac{t}{T}\sqrt{\Delta+\nu\varphi}}$ n'ont point de ſolution poſſible. Soit par exemple $\frac{\sqrt{\Delta+\nu'\varphi}}{\sqrt{\Delta+\nu\varphi}} = 2$, on a $t\sqrt{\Delta+\nu'\varphi} = 2t\sqrt{\Delta+\nu\varphi}$, & $\frac{\text{ſin.}\frac{2t}{T}\sqrt{\Delta+\nu\varphi}}{\text{ſin.}\frac{t}{T}\sqrt{\Delta+\nu\varphi}} = 2\cos.\frac{t}{T}\sqrt{\Delta+\nu\varphi}$; donc on a à la fois $2\cos.\frac{t}{T}\sqrt{\Delta+\nu\varphi} = \frac{\nu'(\alpha+\nu\mathcal{C})}{2\nu(\alpha+\nu'\mathcal{C})}$ & $\frac{\alpha+\nu\mathcal{C}}{2(\alpha+\nu'\mathcal{C})}$: or comme les quantités α & $\mathcal{C}$ ſont

Digitized by Google

tout-à-fait indépendantes de l'équation $\frac{\sqrt{\Delta + \nu'\varphi}}{\sqrt{\Delta + \nu\varphi}} = 2$, puisque α & ζ n'entrent point dans cette équation, il est évident qu'on peut supposer $\alpha + \nu'\zeta$ si petit (sans être absolument $= 0$) que les deux quantités $\frac{\alpha + \nu\zeta}{2(\alpha + \nu'\zeta)}$ & $\frac{(\alpha + \nu\zeta)\nu'}{2\nu(\alpha + \nu'\zeta)}$ soient plus grandes que 2, & par conséquent que $2 \cos. \frac{t}{T}\sqrt{\Delta + \nu\varphi}$.

Il est donc évident que le premier des cas ci-dessus, qui est le même que celui de l'article 116. n'est pas le seul où les vibrations des deux corps soient synchrones, c'est-à-dire commencent & finissent toutes en même tems. Remarque d'autant plus importante qu'il semble qu'on ait cru jusqu'ici le contraire.

REMARQUE VII.

125. En faisant de même les valeurs de $x = 0$, $y = 0$, on trouvera les cas où les deux corps arriveront dans la situation verticale, & ceux où ils y arriveront en même tems. On pourra s'assurer aisément qu'il y a d'autres cas que celui de l'article 116, ou les demi-vibrations de chaque corps, (j'appelle ainsi les vibrations terminées à la verticale) finiront toujours en même tems. Car si on a par exemple $\frac{\sqrt{\Delta + \nu'\varphi}}{\sqrt{\Delta + \nu\varphi}} = 3$,

Digitized by Google

on a cof. $\frac{t}{T}\sqrt{\Delta + \nu'\varphi} = \text{cof.}\ \frac{3t}{T}\sqrt{\Delta + \nu\varphi}$; donc si cof. $\frac{t}{T}\sqrt{\Delta + \nu\varphi} = u$, cof. $\frac{3t}{T}\sqrt{\Delta + \nu\varphi} = 4u^3 - 3u$; en ce cas si cof. $\frac{t}{T}\sqrt{\Delta + \nu\varphi} = 0$, on aura aussi cof. $\frac{t}{T}\sqrt{\Delta + \nu'\varphi} = 0$. Et il faudra pour que toutes les demi-vibrations finissent en même tems, que $4uu - 3$ ne puisse être égal à $\frac{\nu'(\alpha + \nu\zeta)}{\nu(\alpha + \nu'\zeta)}$ ni à $\frac{\alpha + \nu\varphi}{\alpha + \nu'\zeta}$; or c'est ce qui arrivera si on prend par exemple, α & ζ tels que $\alpha + \nu'\zeta$ soit fort petit, sans être absolument zéro; & ce seul cas fait voir qu'il y a une infinité d'autres semblables qui ne sont pas moins possibles.

Le premier des quatre cas de l'*art.* 124 n'est pas non plus le seul où les vibrations & demi-vibrations soient à la fois synchrones. Car soit par exemple $\frac{\sqrt{\Delta + \nu'\varphi}}{\sqrt{\Delta + \nu\varphi}} = m$, m étant un nombre entier impair; il est clair que sin. $\frac{t\sqrt{\Delta + \nu\varphi}}{T} = 0$, rendra sin. $\frac{t}{T}\sqrt{\Delta + \nu'\varphi} = 0$; car alors on aura $\frac{t}{T}\sqrt{\Delta + \nu\varphi} =$ à un certain nombre de fois la demi-circonférence, & par conséquent aussi $\frac{t}{T}\sqrt{\Delta + \nu'\varphi}$, ou $\frac{mt}{T}\sqrt{\Delta + \nu\varphi} =$ à un certain nombre de fois la demi-circonférence. Dans ce

Digitized by Google

même cas il eſt aiſé de voir que cof. $\frac{t}{T}\sqrt{\Delta + r\varphi} = 0$, donnera auſſi cof. $\frac{t}{T}\sqrt{\Delta + r'\varphi} = 0$; car alors $\frac{t}{T}\sqrt{\Delta + r\varphi}$ ſera égal à 90 degrés pris un nombre impair de fois; donc il en ſera auſſi de même de $\frac{mt}{T}\sqrt{\Delta + r\varphi}$. Donc en ce cas les vibrations totales, & les demi-vibrations finiront toutes en même tems, ſi les autres conditions énoncées plus haut dans cet article 125 & dans l'*art.* 124 précédent, ſont obſervées, par exemple, ſi $\alpha + r'\zeta$ eſt très-petit &c.

Remarque VIII.

126. Si les deux corps avoient une viteſſe initiale, enſorte que $\frac{-dx}{dt}$ fût $= g$, & $\frac{-dy}{dt} = k$; les équations ne ſeroient gueres plus difficiles à intégrer. On conſidérera pour lors que dx étant $= \frac{r'du - rdu'}{r' - r}s$, & dy étant $= \frac{du - du'}{r - r'}$, on aura les valeurs de $\frac{du}{dt}$ & $\frac{du'}{dt}$ lorſque $s = 0$, & ces valeurs ſeront exprimées par une équation fort ſimple en g & en k; ſoit donc $\frac{-du}{dt} = \eta$ & $\frac{-du'}{dt} = \gamma$ lorſque $s = 0$,

& l'équation $-ddu = Kudt^2$ donnera $\frac{-du^2}{dt^2} + n^2 = Kuu - KAA$, A étant la valeur connue de u lorsque $t = 0$; donc $dt\sqrt{K} = \frac{-du}{\sqrt{\frac{n^2}{K} + AA - uu}}$: donc si on appelle ϕ l'angle dont le cosinus est A, & le sinus $-\frac{n}{\sqrt{K}}$, on aura $u = \text{cos.}(t\sqrt{K} + \phi) = \text{cos.}\,\phi\ \text{cos.}\,t\sqrt{K} - \text{sin.}\,\phi\ \text{sin.}\,t\sqrt{K}$; d'où il est aisé de voir que u sera $= A\ \text{cos.}\ t\sqrt{K} - \frac{h}{\sqrt{K}}\ \text{sin.}\ t\sqrt{K}$; on trouvera de même la valeur de u'.

COROLLAIRE IV.

127. En général, si un fil $CMm\mu$ (Fig. 33) est chargé de tant de poids M, m, μ &c. qu'on voudra, infiniment peu éloignés de la verticale, on peut toujours déterminer la force accélératrice de chacun de ces Corps, par l'une des deux solutions données *art.* 115 & 121, pour le cas de deux Corps.

Supposons, par exemple, qu'il y ait trois Corps M, m, μ, dont les pesanteurs P, p, π suivant MA, ma, $\mu\alpha$, se décomposent chacune en deux autres, dont les unes soient les forces accélératrices des corps M, m, μ suivant MV, mu, $\mu\upsilon$; les autres, dirigées suivant MB,

MB, mb, μZ, se fassent équilibre; & que les fils CM, Mm, $m\mu$, soient prolongés suivant MR, mr, μZ; il est clair que les puissances suivant μZ, mb, qui doivent être censées égales aux poids des corps μ, m, doivent se réduire à une puissance suivant mr, qui peut être regardée comme égale à leur somme; que de même la puissance suivant mr ou Mm, & la puissance suivant MB qui doit être censée égale au poids du corps M, doivent se réduire à une puissance suivant MR. On aura donc la force accélératrice du corps $\mu = \pi$. angl. $Z\mu\alpha$; celle du corps $m = p$ [angl. rma — angl. $\frac{r m \mu . \pi . \mu}{p . m}$]; celle du corps $M = P$ [angl. RMA — angl. $\frac{R M m \times (p . m + \pi . \mu)}{P . M}$].

En général il est visible, que si pour simplifier le calcul, on suppose toutes les pesanteurs égales à une même quantité g qu'on prendra pour l'unité, & qu'on appelle p, q, r, s &c. les angles MCO, mMR, μmr &c. & B, C, D, E &c. les masses à commencer de haut en bas, les forces accélératrices seront par ordre à commencer du corps le plus bas :

$$p + q + r + s$$

$$p + q + r - \frac{sE}{D}$$

$$p + q - r . \left[\frac{E + D}{C}\right]$$

$$P - q . \left[\frac{E + D + C}{B}\right].$$

Digitized by Google

Ce qui s'accorde avec ce qu'a trouvé M. *Daniel Bernoulli*, Tom. VII. des *Mémoires de Peterſbourg*, p. 170.

COROLLAIRE V.

128. Suppoſons que le fil ne ſoit chargé que de trois corps égaux entr'eux, dont x, y & z ſoient les diſtances à la verticale à commencer par le plus haut; & que les portions du fil interceptées entre ces corps, ſoient égales: ſi on veut que ces corps arrivent en même tems à la verticale, il faut faire $x : y :: p - 2q : p + q - r$, & $z : y :: p + q + r : p + q - r$; ou (mettant pour p, q, r, leurs proportionnelles $x, y - 2x, z - 2y + x$)

$$x : y :: 5x - 2y : 3y - 2x - z;$$

$$\& z : y :: z - y : 3y - 2x - z;$$

donc $(3y - 2x - z) \cdot z = (z - y) \cdot y$, & $(3y - 2x - z) \cdot x = (3x - 2y + 2x) \cdot y$; donc $z = -5y + \frac{2yy}{x} + 3y - 2x = \frac{2yy}{x} - 2y - 2x$, & $y \cdot \left(\frac{2yy}{x} - 3y - 2x\right) = \left(\frac{-2yy}{x} + 5y\right)\left(\frac{2yy}{x} - 2y - 2x\right)$; d'où l'on tire $\frac{2yy}{x} - 3y - 2x = -\frac{4y^3}{xx} + \frac{4yy}{x} + 4y + \frac{10y^2}{x} - 10y - 10x$: diviſant le tout par x, & ordonnant l'équation par rapport à $\frac{y}{x}$, on aura $\frac{4y^3}{x^3} - \frac{12y^2}{x^2} + \frac{3y}{x} + 8 = 0$, ce qui eſt conforme à ce qu'a trouvé M. *Bernoulli*, *Mé-*

Digitized by Google

Mémoires de Pétersbourg, Tom. VI. p. 112, où il nomme 1 ce que nous avons appellé x, & x ce que nous avons nommé $\frac{y}{x}$.

REMARQUE IX.

129. En général, quel que soit le nombre des corps & la distance des uns aux autres, si on veut qu'ils arrivent tous en même tems à la verticale, les distances du troisiéme & du quatriéme &c. à la verticale, se trouveront toujours par des équations linéaires en $\frac{y}{x}$. De plus l'équation ordonnée par rapport à $\frac{y}{x}$ sera d'un degré égal à l'exposant du nombre des corps, & aura toutes ses racines réelles. Car il est visible que s'il y a trois corps par exemple, & qu'on suppose celui qui est le plus haut placé à une très-petite distance de la verticale, on pourra toujours trouver trois situations pour chacun des deux autres corps, pour qu'ils arrivent à la verticale tous deux en même tems que le premier; savoir, en les mettant, ou tous deux du même côté de la verticale que le premier, ce qui fait un cas; ou l'un du même côté, & l'autre du côté opposé, ce qui fait deux cas. En général, la situation du premier corps étant donnée, le second corps & les autres ont toujours autant de situations possibles, qu'il y a de corps; donc $\frac{y}{x}$ a toujours autant de valeurs réelles qu'il y a de corps; & ainsi

Digitized by Google

l'équation ordonnée par rapport à $\frac{y}{x}$ aura toujours toutes ses racines réelles. Donc la distance infiniment petite du corps supérieur à la verticale étant donnée, chacun des autres corps pourra avoir autant de situations différentes qu'il y a de corps en tout.

COROLLAIRE VI.

130. Les mêmes choses étant supposées que dans le Corollaire V. si on veut avoir le mouvement de chaque corps en particulier, sans s'embarrasser qu'ils arrivent tous en même tems à la verticale, on aura les trois équations

$$-ddx = (5x - 2y) \cdot \frac{2dt^2}{T^2} \quad (S)$$

$$-ddy = (3y - 2x - z) \cdot \frac{2dt^2}{T^2} \quad (T)$$

$$-ddz = (z - y) \cdot \frac{2dt^2}{T^2} \quad (V).$$

Pour intégrer ces équations, je multiplie la seconde par ν, la troisiéme par μ, & je les ajoûte ensemble : j'aurai $-ddx - \nu ddy - \mu ddz = \left[(5 - 2\nu) \cdot x + (3\nu - 2 - \mu) \cdot y + (\mu - \nu) \cdot z\right] \frac{2dt^2}{T^2}$; je fais $5 - 2\nu = \frac{-2 + 3\nu - \mu}{\nu} = \frac{\mu - \nu}{\mu}$, ce qui donne $\mu = -2 + 3\nu - 5\nu + 2\nu\nu = 2\nu\nu - 2\nu - 2$, & $(5 - 2\nu) \cdot (2\nu\nu - 2\nu - 2) = 2\nu\nu - 3\nu - 2$; d'où l'on tire l'équation $\frac{8}{\nu^3} - \frac{3}{\nu^2} - \frac{11}{\nu} + 4 = 0$.

Digitized by Google

Si on ordonne cette derniere équation par rapport à ν, on trouvera qu'elle eſt la même que l'équation $\frac{4y^3}{x^3} - \frac{12y^2}{x^2} + \frac{3y}{x} + 8 = 0$ trouvée ci-deſſus art. 128, & qu'ainſi (*art.* 129) elle a toutes ſes racines réelles; ce que nous prouverons d'ailleurs d'une autre maniere dans l'article ſuivant.

Soient donc ν, ν', ν'' les trois racines de cette équation, on aura $\mu = 2\nu\nu - 2\nu - 2$; $\mu' = 2\nu'\nu' - 2\nu' - 2$; $\mu'' = 2\nu''\nu'' - 2\nu'' - 2$; & ſuppoſant $x + \nu y + \mu z = u$, $x + \nu' y + \mu' z = u'$, $x + \nu'' y + \mu'' z = u''$, on aura les trois équations $-ddu = (5 - 2\nu).\frac{2udt^2}{T^2}$; $-ddu' = (5 - 2\nu').\frac{2u'dt^2}{T^2}$; $-ddu'' = (5 - 2\nu'').\frac{2u''dt^2}{T^2}$; d'où l'on tire comme dans l'article 118, les valeurs de u, u', u'', & par conſéquent celles de x, y, z.

On réſoudra le Problême de la même maniere, quelque ſoit le nombre des corps, & le rapport de leurs maſſes.

REMARQUE X.

131. Quand l'équation en ν n'auroit pas toutes ſes racines réelles, il eſt aiſé de voir que la ſolution ne réuſſiroit pas moins. Car comme les quantités variables x, y, z &c. doivent évidemment avoir des valeurs réelles exprimées en t, les imaginaires, s'il y en a, ſe

détruiroient dans les expreſſions de ces quantités. En effet j'ai démontré ailleurs que toute quantité imaginaire donnée, & toute racine imaginaire d'une équation ſe réduit à la forme $\alpha + \zeta\sqrt{-1}$, α & ζ étant des grandeurs réelles. Donc dans le cas même où v auroit toutes ſes racines imaginaires, les équations en u, u', &c. pourroient être réduites à cette forme $-ddu = (+\alpha + \zeta\sqrt{-1})\,u\,dt^2$, dont l'intégrale (*) eſt $u = Ac^{(\delta+\epsilon\sqrt{-1})t} + Bc^{-(\delta+\epsilon\sqrt{-1})t}$: or on ſait que $c^{z\sqrt{-1}} = \text{cof. } z \pm \sqrt{-1} \times \text{ſin. } z$, & que $c^{-z\sqrt{-1}} = \text{cof. } z \mp \sqrt{-1}\,\text{ſin. } z$. Donc $u = Ac^{\delta t} \times (\text{cof. } \epsilon t \pm \sqrt{-1}.\ \text{ſin. } \epsilon t) + Bc^{-\delta t} \times (\text{cof. } \epsilon t \mp \sqrt{-1}.\ \text{ſin. } \epsilon t)$. Il en ſera de même des valeurs de u', de u'' &c. Donc les valeurs de x, y, z &c. ne pourront jamais contenir tout au plus, que des quantités de cette forme $c^{\delta t}$, ſin. ϵt, cof. ϵt, avec des coefficiens réels ou imaginaires; & comme il faut que les valeurs de x, y, z &c. ſoient réelles, & que la ſolution donnée étant générale, doit infailliblement faire trouver ces valeurs, il s'enſuit que les imaginaires (s'il y en a) devront néceſſairement ſe détruire.

Mais on peut prouver aiſément par la valeur même de u qu'il n'y aura jamais d'imaginaires. Car les équa-

(*) *Voyez* les Mémoires de l'Académie de Berlin, 1748 & 1750.

Digitized by Google

tions $x + \nu y + \mu z = u$ &c. prouvent que les valeurs de u, u' &c. ſont formées des valeurs de x, y, z. Or lorſque $t = 0$, on doit avoir $dx = 0$, $dy = 0$, $dz = 0$, parceque les corps ſont ſuppoſés partir du repos. Donc auſſi lorſque $t = 0$, on doit avoir $du = 0$, $du' = 0$ &c. Donc on aura $\delta A - \delta B \pm \epsilon\sqrt{-1} \times A \mp \epsilon\sqrt{-1}.B = 0$. Donc on aura, ou $A = B$, ou $\delta = 0$ & $\epsilon = 0$. Or je vais prouver que δ doit être néceſſairement $= 0$. En effet les valeurs de x, de y & de z &c. doivent toujours être extrêmement petites, par la nature du Problême, puiſqu'il eſt clair que chacun des corps ne peut faire que des oſcillations de peu d'étendue; ainſi les valeurs de x, y, z &c. ne peuvent renfermer des quantités de l'eſpece $c^{\delta t}$, parcequ'alors elles croîtroient à l'infini; donc u ne doit pas en renfermer non plus: donc $\delta = 0$. Donc $u = (A+B)$ cof. $\epsilon t \pm (A - B)\sqrt{-1}$ ſin. ϵt; & comme u ne doit point avoir de valeur imaginaire, il s'enſuit que $(A - B)\sqrt{-1}$ ſin. $\epsilon t = 0$; donc $A = B$. Donc puiſque $u = (A+B)$ cof. ϵt, on aura $\frac{ddu}{udt^2} = -\epsilon^2$; donc l'équation différentielle en u ne contiendra jamais d'imaginaires; & comme le coefficient de u dans cette équation ne renferme d'indéterminée que ν, il s'enſuit que la valeur de ν ſera toujours réelle.

Au reſte il eſt viſible que dans le cas où il y a plus de deux corps, on peut faire ſur leurs mouvemens &

Digitized by Google

leurs vibrations plusieurs remarques, analogues à celles que nous avons faites sur le mouvement du fil chargé de deux corps : mais ce détail nous meneroit trop loin.

REMARQUE XI.

132. Si on suppose que les corps attachés au fil se meuvent dans un milieu dont la résistance soit proportionnelle à $\gamma + \delta u$, γ & δ étant des constantes quelconques, & u la viteſſe, en ce cas les équations pourroient encore s'intégrer. Par exemple ſuppoſons pour ſimplifier le calcul, qu'il n'y ait que deux corps égaux, on aura (*art.* 118) $-ddx = \left(\frac{2px - py}{l} - \frac{\gamma}{M} + \frac{\delta ddx}{Mdt}\right) \frac{2ldt^2}{pT^2}$; & $ddy = \left(\frac{2py - 2px}{l} - \frac{\gamma'}{M} + \frac{\delta' ddy}{Mdt}\right) \frac{2ldt^2}{pT^2}$; équations qui peuvent s'intégrer par différentes méthodes, que j'ai expliquées dans les *Mémoires de l'Académie de Berlin*, pour les années 1748 & 1750. C'eſt pourquoi je ne m'y arrêterai pas davantage.

COROLLAIRE VII.

133. Soit une courbe chargée de poids infiniment petits & égaux, placés à des diſtances infiniment petites les unes des autres, & tous infiniment peu éloignés de la verticale; ſoient x les abſciſſes, y les ordonnées infiniment petites de cette courbe, s les arcs, qui diffèrent infiniment peu des x correſpondantes, enfin l la longueur du

Digitized by Google

du fil, il suit de l'*art.* 127. que la force accélératrice de chaque petit poids, est comme la somme des sinus des angles de contingence depuis le sommet, moins l'angle de contingence multiplié par le rapport des poids inférieurs à ce poids; donc cette force est pour chaque point (37) $\int \frac{d\,d\,y}{d\,s} - \frac{(l-s).d\,d\,y}{d\,s^2}$; ce qui s'accorde avec ce que M. *Daniel Bernoulli* a trouvé dans le Tom. VII. des *Mémoires de Peterſbourg*, p. 171.

M. *Daniel Bernoulli* a tiré de là l'équation que doit avoir la courbe, pour que toutes ſes parties arrivent en même tems à la verticale. *Voy. ibid.* p. 171.

L'équation de cette courbe est en général $\frac{d\,y}{d\,s} - \frac{(l-s)\,d\,d\,y}{d\,s^2} = \frac{y}{n}$ (38); faiſant $l - s = x$; $y = c^{\int p\,d\,x}$, & $p\,x = z$, on parvient à l'équation

(37) On prend $\frac{d\,d\,y}{d\,s}$ pour l'angle de contingence, quoique cet angle ait pour expreſſion générale $\frac{d\,x\,d\,d\,y}{d\,s} \times \frac{1}{d\,s}$; mais comme on ſuppoſe tous les points de la corde infiniment près de la verticale, $d\,x$ & $d\,s$ peuvent être pris l'un pour l'autre.

(38) L'équation de la courbe eſt $\frac{d\,y}{d\,s} - \frac{(l-s)\,d\,d\,y}{d\,s^2} = \frac{y}{n}$; parce que la force accélératrice eſt repréſentée par $\frac{d\,y}{d\,s} - \frac{(l-s)\,d\,d\,y}{d\,s^2}$, & que cette force étant ſuppoſée proportionnelle à l'eſpace y qui reſte à parcourir juſqu'à la verticale, tous les points de la courbe arriveront à cette verticale en même tems.

Digitized by Google

$n\,dz + \frac{n z z\,dx}{x} = -\,dx$, qui tombe dans le cas de *Ricati*, & qui n'eſt pas intégrable par les méthodes connues; ce qui eſt d'autant plus ſingulier, que ſi on fait $x = k u^m$, k & m étant des conſtantes à volonté, on aura $n u dz + n m z z\,du + k m u^m\,du = 0$, équation qui n'eſt guéres plus compoſée que la précédente, & dont je n'ai pû cependant ſéparer les indéterminées, quoique les deux quantités k, m, puiſſent être telles qu'on voudra, pourvû qu'elles ne ſoient pas zéro.

Si la courbe n'a pas cette équation, alors elle changera d'équation d'un inſtant à l'autre, & la valeur générale d'une ordonnée y, ne pourra être exprimée que par une fonction de l'arc s ou de l'abſciſſe x correſpondante, & du tems t écoulé depuis le commencement du mouvement; cette fonction, lorſque $t = o$, deviendra la valeur de y en s donnée par l'équation de la premiere courbe (39). Soit donc en général

(39) Quand on ſuppoſe que tous les points de la courbe doivent arriver en même tems à la verticale, il ſuffit pour avoir toutes les figures qu'elle formera ſucceſſivement, d'avoir par le moyen de l'équation dont on a parlé ci-deſſus, la figure initiale; en effet les ordonnées de l'une de ces figures quelconque, ont un rapport conſtant avec les ordonnées de la premiere, enſorte qu'il ſuffit de déterminer au bout d'un tems quelconque t, quelle doit être la valeur de l'une d'entr'elles; c'eſt à quoi on ſatisfait aiſément en intégrant l'équation $-\,dd\,y' = \frac{y'\,dt^2}{n}$, y' étant l'ordonnée qui dans la nouvelle courbe répond au même point de la corde que y dans la premiere. Mais lorſque tous les points de la courbe ne ſont pas ſuppoſés

$y = (*)\varphi(t.s)$, $dy = p\,dt + q\,ds$, $-\,d\,d\,y$ la différence seconde de y, en faisant s constante, (je mets $-\,d\,d\,y$, parceque t croissant y diminue, & que la vitesse augmente) $d\,d\,y$ la diff. seconde en prenant t constante; on a $-\,d\,d\,y = \left[\frac{dy}{ds} - (l-s).\frac{d\,d\,y}{d\,s^2}\right].dt^2$, ou $\frac{-dp}{dt} = q - (l-s).\frac{dq}{ds}$ (40); on observera

devoir arriver en même tems à la verticale, alors la figure initiale étant donnée, les figures qu'elle doit prendre successivement ne peuvent plus en être déduites si aisément. Néanmoins on voit assez que la position d'un point quelconque de la corde au bout d'un temps quelconque t, ne peut dépendre que de ces trois choses, de la longueur de la partie à l'extrémité de laquelle ce point est placé, du tems depuis lequel tous les points sont en mouvement, & de la figure initiale. Donc l'équation générale qui donnera la valeur de y doit renfermer l'équation de la figure primitive, & doit être elle par conséquent que si on fait $y = \Phi(t.s)$, cette équation soit celle de la figure primitive, en y supposant $t = o$.

(*) Cette quantité $\varphi(t.s)$ exprime en général une fonction de t & de s.

(40) On a vû ci-dessus que la force accélératrice d'un point quelconque de la courbe étoit $\frac{dy}{ds} - (l-s)\frac{d\,d\,y}{d\,s^2}$; donc pour avoir le mouvement de ce point il faut faire $\left(\frac{dy}{ds} - (l-s)\frac{d\,d\,y}{d\,s^2}\right) dt^2$ égal au petit espace que cette force tend à faire parcourir à ce point dans le tems dt, c'est-à-dire égal à la différence seconde de l'ordonnée y; or cette différence doit être prise en supposant s constante, puisque le point dont on considere ici le mouvement est supposé ne point changer de place sur la corde. Au contraire dans la quantité $\frac{dy}{ds} - \frac{(l-s)\,d\,d\,y}{d\,s^2}$, dy & $d\,d\,y$ doivent être pris en supposant s variable & t constant, parceque cette quantité marque pour un même tems, pour une même position de la corde, la force accélératrice de chacun de ses points.

Digitized by Google

que dp doit être prise en ne faisant varier que t, & dq en ne faisant varier que s. Soit $dp = \alpha\, dt + \nu\, ds$, $dq = b\, dt + m\, ds$; à cause que $p\, dt + q\, ds$ est une différentielle complette, il faut que $\frac{dp}{ds} = \frac{dq}{dt}$, c'est-à-dire $b = \nu$. De plus, l'équation $\frac{-dp}{dt} = q - \frac{(l-s).dq}{ds}$ donne $-\alpha = q - (l-s).m$; donc $m\, ds = \frac{q\, ds + \alpha\, ds}{l-s}$: ajoûtant de part & d'autre $b\, dt$ ou $\nu\, dt$, on aura $m\, ds + b\, dt$ ou $dq = \frac{q\, ds + \alpha\, ds}{l-s} + \nu\, dt$. Donc $dq.(l-s) - q\, ds = \nu\, dt.(l-s) + \alpha\, ds$, & $q.(l-s) = \int \nu\, dt.(l-s) + \alpha\, ds$. Cette équation doit avoir lieu, en cas que toutes les courbes variables dont il s'agit, puissent être renfermées dans l'équation générale $y = \varphi(t.s)$.

REMARQUE XII.

134. On remarque une analogie singuliere entre la fonction $\varphi(t.s)$ qui doit exprimer y, & les différentielles de cette fonction à l'infini. Soit $l - s = u$, on aura 1°. $p\, dt - q\, du$ une différentielle complette. 2°. $\frac{-dp}{dt} = q + \frac{u\, dq}{du}$, ou $\frac{-dp}{dt} = \frac{d(qu)}{du}$, & par conséquent $q\, u\, dt - p\, du$ une différentielle complette; de plus, en faisant encore $l - s = u$, il résulte du Corollaire précédent que $\alpha\, dt - \nu\, du$, &

$\gamma u dt - \alpha du$ seront des différentielles complettes, dont la seconde sera $= d(q.\overline{l-s})$ ou $d(qu)$: donc si on fait $dy = p dt - q du$, $dp = \alpha dt - \gamma du$, $d\alpha = \rho dt - \omega du$ &c. & ainsi à l'infini, on aura les différentielles complettes deux à deux,

$p dt - q du$; $\alpha dt - \gamma du$; $\rho dt - \omega du$; &c.
    &   &   &
$qudt - pdu$; $\gamma udt - \alpha du$; $\omega udt - \rho du$;

& ainsi à l'infini; de sorte que si on trouve un seul cas d'intégrabilité, on pourra en remontant, en trouver d'autres à l'infini. Par exemple soit $\rho = A + Bt$, & $\omega = C + Du^{-1}$, on trouvera que $\rho dt - \omega du$ est égal à une différentielle complette, & que $\omega udt - \rho du$ est aussi une différentielle complette, pourvû que $C = -B$. De plus comme on a trouvé $d(qu) = \gamma udt - \alpha du$, on aura de même $d(\gamma u) = \omega udt - \rho du$; donc α ou $\int \rho dt - \omega du = At + \frac{Btt}{2} - Bu + D.\text{Log.}\, u + E$, & $\gamma = \frac{Dt}{u} - A - Bt + \frac{F}{u}$; on trouvera de la même maniere p & q au moyen des valeurs de α, γ; & toutes les quantités qu'on trouvera ainsi deux à deux en remontant, & que je nomme en général P & Q, seront telles que $P dt - Q du$, & $Q udt - P du$ seront des différences complettes. C'est pourquoi le Problême dont il s'agit, sera résolu *analytiquement* pour une infinité de cas. Je dis *analytiquement*, & non relativement à la question présente;

Digitized by Google

car il faut avouer qu'aucune de ces solutions ne pourra représenter la courbe cherchée. 1°. Parceque ces solutions donnant des termes où t se trouve seule, y croîtroit à l'infini, à mesure que t croîtroit, ce qui ne sauroit être ici par l'hypothese. 2°. Parceque ces solutions renfermeroient encore des termes de cette forme $D.\text{Log.}\,u$, qui sont infinis lorsque $u = 0$, c'est-à-dire lorsque s est égale à toute la longueur de la corde.

Remarque XIII.

135. C'est pour la même raison qu'on ne sauroit supposer $y = S + S't^2 + S''t^4$ &c. S, S', S'' étant des fonctions indéterminées de s; car quoique l'on trouve assez facilement par le calcul les valeurs de S, S', S'', &c. les valeurs de y qui en résulteroient auroient le même inconvénient que la précédente, par rapport à la solution du Problême en question (41).

Si on fait $y = T.S$, T étant une fonction inconnue de t, & S une fonction aussi inconnue de s, l'équation $\frac{-dp}{dt} = q - \frac{(l-s)\,dq}{ds}$ donnera $-\frac{ddT}{dt^2} \times S =$

(41) Car si on substitue à y cette valeur dans l'équation $-\,d\,d\,y = \left[\frac{dy}{ds} - (l-s)\frac{d\,d\,y}{d\,s^2}\right] dt^2$, en observant de prendre les différences de la maniere qu'on a déja dit, & qu'on égale à zéro les termes affectés d'une même puissance de t, on trouvera que l'équation qui détermineroit S'' est $\frac{d\,d\,S''}{d\,S''} = \frac{d\,s}{l-s}$. Les autres suppositions que l'on fait pour y se vérifient à peu près de la même maniere,

Digitized by Google

$\frac{T\,dS}{ds} - \frac{(l-s)\,T\,d\,dS}{ds^2}$; d'où l'on tire $\frac{-\,d\,dT}{T\,dt^2} = \frac{1}{n}$; & $\frac{S}{n} = \frac{dS}{ds} - (l-s)\frac{d\,dS}{ds^2}$. La seconde équation est celle de la corde dont tous les points arrivent en même tems à la verticale, & la premiere donne $T = A$ cos. $\frac{t}{\sqrt{n}}$, dT devant être $= 0$ lorsque $t = 0$. Ainsi cette équation n'apprend encore rien, puisqu'elle ne fait trouver les vibrations que dans le cas où la corde a une figure telle que tous ses points arrivent en même tems à la situation verticale.

On pourroit aussi supposer $y = T.S + T''S''$, & faire $\frac{-\,d\,dT}{T''\,dt^2} = m$; $\frac{-\,d\,dT''}{T\,dt^2} = m''$, m & m'' étant des constantes positives indéterminées, & ensuite supposer $Sm = \frac{dS''}{ds} - (l-s)\frac{d\,dS''}{ds^2}$, & $S''m'' = \frac{dS}{ds} - (l-s)\frac{d\,dS}{ds^2}$; mais cette méthode donneroit une équation différentielle du quatriéme ordre pour la valeur de S''. De plus il faudroit que les valeurs de T & de T'' fussent telles, 1°. Que y fût toujours très-petit. 2°. Que y fût $= 0$ lorsque $s = 0$. 3°. Que $s = 0$ donnât $dy = 0$. Or il est assez facile de s'assurer que les valeurs de T & de T'' tirées des équations $\frac{d^4\,T''}{m''} = mT''\,dt^4$, & $T = \frac{-\,d\,dT''}{m''\,ds^2}$,

Digitized by Google

ne peuvent satisfaire à toutes ces conditions à la fois. Car en intégrant la premiere de ces équations par les méthodes enseignées dans les *Mémoires de Berlin* 1748 & 1750, on verra que T'' contiendra des quantités de cette forme $c^{\delta t}$, δ étant une quantité réelle. Donc toutes les méthodes proposées jusqu'ici ne peuvent servir à trouver la valeur de y.

REMARQUE XIV.

136. Mais voici une méthode qui peut réussir dans plusieurs cas. Soit $y = TS + T'S' + T''S''$ &c. & soit $\frac{-ddT}{Tdt^2} = n$, $\frac{-ddT'}{T'dt^2} = m$, $\frac{-ddT''}{T''dt^2} = r$ &c. n, m, r, étant des quantités différentes, on aura $y = AS\cos. t\sqrt{n} + BS'\cos. t\sqrt{m} + CS''\cos. t\sqrt{r}$ &c. & on déterminera S, S', S'' &c. par les équations suivantes qui ne peuvent être intégrées que par les séries

$$Sn = \frac{dS}{ds} - (l - s)\frac{ddS}{ds^2}$$

$$S'm = \frac{dS'}{ds} - (l - s)\frac{ddS'}{ds^2}$$

$$S''r = \frac{dS''}{ds} - (l - s)\frac{ddS''}{ds^2} \text{ &c.}$$

Mais il faudra pour cela que l'équation primitive de la courbe, lorsque $t = 0$, soit $y = A.S + B.S' + C.S''$ &c. Ainsi le Problême ne peut être résolu par cette méthode que dans certains cas particuliers.

REMARQUE

Remarque XV.

137. Pour faire avec précision les calculs précédens, il faut mettre l'équation sous cette forme $-\mathrm{d}\,\mathrm{d}y = \left[\frac{dy}{ds} - (l-s)\frac{ddy}{ds^2}\right].\frac{2adt^2}{\theta^2}$, θ étant le tems qu'un corps pesant mettroit à descendre de la hauteur a; & on aura $y = AS\cos.\frac{t\sqrt{n}}{\theta} + BS'\cos.\frac{t\sqrt{m}}{\theta}$ &c. & $\frac{Sn}{2a} = \frac{dS}{ds} - (l-s)\frac{ddS}{ds^2}$; &c.

M. Daniel Bernoulli prétend (*Mém. de l'Académie de Berlin* 1753. pag. 194) que la corde vibrante ne peut jamais reprendre sa premiere position, excepté dans le seul cas de $y = A.S\cos.\frac{t\sqrt{n}}{\theta}$, c'est-à-dire dans le cas où toutes les vibrations (pour parler le langage de ce grand Géometre) sont simples & d'une seule & même espece. Pour que cette proposition fût hors de doute, il faudroit avoir prouvé, 1°. que les quantités m, n &c. à l'infini sont incommensurables entr'elles, ce que M. Bernoulli ne paroît point avoir fait. Il est vrai qu'il trouve que ces quantités sont les racines d'une équation composée d'une infinité de termes, mais cela ne suffit pas, ce me semble, pour établir leur incommensurabilité mutuelle. Or si elles ne sont pas incom-

menſurables, & que $\sqrt{m}$ par exemple ſoit $= q\sqrt{n}$, q étant un nombre quelconque, entier ou fractionnaire, il eſt aiſé de voir que la chaîne reprendra ſa premiere forme, quand $\frac{t\sqrt{n}}{\theta}$ & $\frac{qt\sqrt{n}}{\theta}$ ſeront chacun un multiple de 360 degrés. 2°. Il faudroit de plus avoir prouvé que l'équation $y = T.S + T'S' +$ &c. ou $y = A.S\,\text{cof.}\,\frac{t\sqrt{n}}{\theta} + B.S'\,\text{cof.}\,\frac{t\sqrt{n}}{\theta}$ &c. eſt la ſeule qui puiſſe exprimer la corde vibrante. Or c'eſt de quoi on n'eſt nullement aſſuré.

REMARQUE XVI.

138. Nous avons vû ci-deſſus (*art.* 125) que le cas de l'art. 116 n'eſt pas le ſeul où tous les poids dont un fil eſt chargé arrivent en même tems à la verticale, & faſſent leurs oſcillations en même tems. Il pourroit donc très-bien ſe faire que l'équation trouvée (*art.* 133) ne fût pas la ſeule qui rendît ſynchrones les vibrations de la chaîne. Mais il eſt difficile de prononcer là-deſſus, faute d'avoir d'une maniere générale & complette l'équation de la chaîne vibrante.

LEMME VIII.

139. *Soit un corps* C R M (Fig. 34) *de figure quelconque, dont le centre de gravité ſoit* G, *& que je conſidererai pour plus de facilité comme une figure plane; que toutes les parties* V *de ce corps ſoient animées par des*

Digitized by Google

forces V M *dont les directions ſoient perpendiculaires à la ligne* V C, *menée des points* V *à un point fixe* C *pris à volonté dans le corps, & que ces forces ſoient entr'elles comme les diſtances* V C; *je dis que la direction de la force réſultante ſera une ligne* K L *perpendiculaire à la droite* C G *menée par* G, *& par le point donné* C.

Car décompoſant chaque force VM en deux, l'une ſuivant VN parallèle à CV, l'autre ſuivant VP perpendiculaire à CV; il eſt aiſé de voir que les forces ſuivant VN ſeront comme les diſtances CQ de ces forces à la ligne CG, qu'ainſi les ſommes de ces forces ſeront égales à la ſomme des produits de chaque particule par ſa diſtance à la ligne CG. Mais comme CG paſſe par le centre de gravité G, cette ſomme eſt $= o$. Donc la force réſultante des forces ſuivant VN eſt $= o$. Donc la direction & la valeur de la force que nous cherchons, ſera la même que celle qui réſulte des ſeules forces ſuivant VP perpendiculaires à CG. Donc la direction de cette force ne peut manquer d'être une ligne OKL perpendiculaire à CG.

A l'égard de la valeur de la force ſuivant OL, elle eſt égale à la ſomme des forces ſuivant VP multipliées par les petites maſſes correſpondantes V; & comme les forces VP ſont proportionnelles à VQ, & que $\int V.VQ$ eſt égal à CG multiplié par la maſſe MRC, par la propriété du centre de gravité; il s'enſuit, que ſi on appelle φ la force accélératrice du point G, la force ſuivant OL ſera $= \varphi . MRC$.

Digitized by Google

La distance CK de la ligne OL à $C = \frac{\int V.\varphi.\frac{VC}{CG} \times VC}{\varphi.MRC}$ $= \frac{\int V.VC^2}{CG.MRC}$. Car puisque toutes les forces φ se réduisent à une puissance dirigée suivant OKL, il s'ensuit que la même puissance dirigée en sens contraire suivant LKO feroit équilibre aux forces φ; cet équilibre étant supposé, il continuera d'avoir lieu, si on suppose le point C fixe. Or dans ce dernier cas, le moment de la force $\varphi.MRC$ agissant suivant LKO doit être égal (par le principe du levier) à la somme des momens des forces VM: le premier de ces momens est $\varphi.MRC \times CK$; le second est $\int V.\varphi.\frac{VC}{CG}.VC$. Donc &c.

COROLLAIRE I.

140. On voit par là que la position de la ligne OKL est toujours donnée, quelle que soit φ.

COROLLAIRE II.

141. Si un corps CRM, entierement libre, est animé par une puissance quelconque K, dirigée suivant une ligne quelconque GB, qui passe par le centre de gravité G, & qu'en même tems ce corps tende à tourner autour de son centre de gravité G, avec une viteſſe quelconque; on prouvera, comme dans le Lemme précédent, que la force résultante sera $= K$, & dirigée

Digitized by Google

ſuivant une ligne *O K L* parallèle à *G B*. Donc cette puiſſance dirigée ſuivant *L K O* feroit équilibre à la puiſſance *K* paſſant par le centre *G*, & aux puiſſances qui tendent à faire tourner le corps. Donc le moment de cette puiſſance par rapport au point *G* doit être égal au moment de la puiſſance *K*, par rapport au même point *G*, & au moment de toutes les puiſſances de rotation. Donc ſi on appelle Ψ la puiſſance qui tend à faire tourner autour de *G* un point quelconque placé à la diſtance *b*, & *a* la ſomme des produits des particules par le quarré de leurs diſtances à *G*, on aura $K \times GK = K \times o + \frac{\Psi a}{b}$; ou $\frac{\Psi a}{b} = K.GK.$

Il eſt à remarquer que pour que la force ſuivant *O K L* ſoit du côté où nous l'avons ſuppoſée dans la figure, la force de rotation doit agir dans ce même ſens. Autrement il ne pourroit y avoir d'équilibre entre la force ſuivant *L K O* & la force de rotation.

Dans l'hypotheſe contraire *GK* ſera négative, & on aura $K \times GK = -\frac{\Psi a}{b}$ ou $K \times GK + \frac{\Psi a}{b} = o.$

COROLLAIRE III.

142. De là il eſt aiſé de conclure, pour le dire en paſſant, que ſi un corps libre & en repos eſt pouſſé par une puiſſance quelconque *K* ſuivant *O K L*, ſon centre de gravité *G* ſera mû ſuivant *G B* parallèlement à *O K L*, de la même maniere que ſi la puiſſance *K*

Digitized by Google

paſſoit par le centre G, & que de plus le corps tournera autour de ce même centre G ſuivant OKL avec une viteſſe Ψ, telle que $\frac{\Psi a}{b} = K.GK$, c'eſt-à-dire avec la même viteſſe qu'il tourneroit, ſi le centre G étoit ſuppoſé fixe, & que la puiſſance K agît au point K ſuivant OKL pour faire tourner le corps.

Car (*art.* 61) le mouvement que le corps doit prendre doit être tel, que ſi on le lui donnoit en ſens contraire, il fût en équilibre avec la puiſſance K. D'où il s'enſuit par l'article précédent qu'il doit prendre le mouvement que nous venons de dire.

Soit M la maſſe du corps; toutes ſes parties ſe mouvront parallèlement à GB avec une viteſſe égale à $\frac{K}{M}$, & de plus (nommant x leurs diſtances à G) elles tourneront ſuivant OKL autour de G avec une viteſſe $= \frac{\Psi x}{b} = \frac{K.GK.x}{a}$; d'où il eſt aiſé de voir que tous les points de la ligne CG auront parallèlement à GB une viteſſe $\frac{K}{M} - \frac{K.GK.x}{a}$; donc ſi on prend ſur la ligne CG un point H, tel que $GH = \frac{a}{M.GK}$, la viteſſe de ce point H ſera nulle. Donc ce point ſera en repos, & ſera par conſéquent ce que M. Bernoulli appelle le *centre ſpontané de rotation* du corps. Au reſte il eſt viſible que ce centre

Digitized by Google

change à chaque instant, puisqu'à chaque instant la ligne GK change de situation.

PROBLÈME VI.

143. *Un Corps* CRV (Fig. 35) *de figure quelconque, dont* G *est le centre de gravité, étant suspendu à un fil* AC, *& les lignes* AC, CG *étant infiniment peu écartées de la verticale, trouver la vitesse des points* C *&* G *pour un tems donné* t (42).

Les parties du corps CRV ont chacune un mouvement égal & parallèle à celui du point C, & elles tournent en même tems autour de ce point C avec des vitesses qui sont entr'elles comme les distances à ce point. Soit p la pesanteur absolue d'une particule quelconque V suivant la verticale VQ, & soit cet effort décomposé pour chaque particule en deux autres, dont l'un suivant Vu soit égal & parallèle à la force accélératrice du point C suivant CP, & l'autre soit dirigé suivant Vn. Cet effort Vn dont on ne connoît point encore la direction, sera égal & de même direction pour toutes les particules : c'est pourquoi on peut regarder tous les efforts Vn comme réunis au centre G, & agissant suivant GN parallèle à Vn. Il faut de plus décomposer cet effort Vn pour chaque particule en deux autres, dont l'un soit l'effort nécessaire pour faire tourner la particule V autour de C, & l'autre soit détruit. J'appelle ce dernier effort s, & puisque tous les efforts s doivent être

(42) On suppose que les points A, C, G sont dans un même plan vertical.

détruits, il faut que la force qui en réſulte ſoit dans la direction de AC.

On a déja trouvé que GN parallèle à Vn, & dont la poſition eſt inconnue, eſt la direction de la force réſultante des forces Vn; on trouvera (*art.* 140) la poſition de la ligne KL, direction de la force réſultante des efforts des particules V pour tourner autour de C, quoiqu'on ne connoiſſe pas encore la valeur de cette force. La force ſuivant GN étant compoſée de la force ſuivant KL, & de la force réſultante des forces s, cette derniere paſſera par le concours L de GN & KL; de plus elle doit être dans AC prolongée. Donc le point L eſt dans AC prolongée: donc la ligne GN doit paſſer par le point où ſe rencontrent les lignes KL donnée de poſition, & AC prolongée; & CL ſera la direction de la force réſultante des forces s.

Soit π la force de C ſuivant CP, laquelle eſt commune à toutes les particules, φ celle de G pour tourner autour de C, on menera Gi parallèle à CP, & GM à AP, & on nommera AC, l, CG, a, GK, b, m la maſſe du corps, CP, x, l'angle fait par CG & par la verticale, $\frac{y}{a}$ (43): GK & GL pourront être cenſées égales, & l'on aura l'angle $GLM = \frac{GCL.CG}{GK} =$

(43) La diſtance de G à la verticale qui paſſe par C eſt ſuppoſée y; donc l'angle dont il s'agit $= \frac{y}{a}$, puiſqu'il eſt infiniment petit.

(2

Digitized by Google

$\left(\frac{y}{a} - \frac{x}{l}\right).\frac{a}{b}$, & l'angle $LGM = \frac{x}{l} - \left(\frac{y}{a} - \frac{x}{l}\right)\frac{a}{b}$; mais la force $\pi = p.LGM = p\left[\frac{x}{l} - \left(\frac{y}{a} - \frac{x}{l}\right)\frac{a}{b}\right]$; & la force suivant $KL\,(\varphi.m)$ doit être à la force suivant $GL\,(p.m)$ :: l'angle GLM au sinus total (44). Donc $\varphi = p\left(\frac{y}{a} - \frac{x}{l}\right)\frac{a}{b}$; on a donc $-ddx = \left[x - \left(\frac{yl}{a} - x\right)\frac{a}{b}\right]\frac{2dt^2}{T^2}$, & $-ddy = \left(\frac{yl}{b} - \frac{ax}{b}\right).\frac{2dt^2}{T^2}$; équations qui s'intégreront par une Méthode pareille à celle dont on s'eſt déja ſervi pour des cas ſemblables, dans les *art.* 118 & 122.

COROLLAIRE.

144. Si on veut que les points C, G arrivent en même tems à la verticale, on fera

$$x : y :: \frac{x}{l} - \frac{y}{b} + \frac{ax}{bl} : \frac{y}{b} - \frac{ax}{bl};$$

donc $\frac{xy}{b} - \frac{axx}{bl} = \frac{xy}{l} - \frac{yy}{b} + \frac{axy}{bl}$:

donc $\frac{x}{y} = -\frac{1}{2} + \frac{l-b}{2a} \pm \sqrt{\left[\frac{l}{a} + \left(\frac{l-b}{2a} - \frac{1}{2}\right)^2\right]}$.

(44) L'angle SLO eſt conſidéré comme droit, & dans l'équation ſuivante T eſt pris dans le même ſens qu'à l'article 118.

Digitized by Google

Si l eſt fort grande par rapport à a & à b, on a $x = \frac{y\,l}{a}$ & $x = -y$. La premiere de ces équations donne $\frac{x}{l} = \frac{y}{a}$; c'eſt-à-dire que ſi le fil eſt fort long, les lignes CG & AC doivent être à très-peu-près dans la même droite, pour que les points C, G arrivent en même tems à la verticale. La ſeconde donne les angles des lignes AC, CG avec la verticale, & du même côté, en raiſon inverſe de AC à CG; c'eſt-à-dire que pour les points C, G arrivent en même tems à la verticale, il faut par la premiere équation, que CG & AC ſoient dans la même ligne droite, & par la ſeconde, que le centre G ſoit ſitué au premier inſtant dans la verticale AP, ou au moins fort proche de cette verticale.

Au reſte ce Problême étant abſolument analogue à celui du fil chargé de deux poids, eſt ſuſceptible de remarques ſemblables. Nous les laiſſons à faire au Lecteur.

§. II.

Des Corps qui vacillent ſur des plans.

PROBLÊME VII.

145. *Soit une figure quelconque* CKO (Fig. 36) *tellement ſituée ſur un plan horizontal* MCS, *que la direction* GF *de ſon centre de gravité* G *ne paſſe pas par ſon point touchant* C; *on demande ce qui arrivera à cette figure.*

Digitized by Google

Cette figure ne peut avoir que deux mouvemens ; l'un de rotation autour du point touchant C qui change à chaque instant ; l'autre, qui sera le même dans toutes les parties de la figure, pour glisser le long du plan vers M ou vers S : il faut donc déterminer d'abord, si ce dernier mouvement se fait vers M ou vers S ; en second lieu, la valeur de la force qui le produit, & que j'appelle π ; en troisiéme lieu, la force du centre G pour tourner autour de C, & que je nomme φ ; enfin, si cette derniere force fait tourner G à droite ou à gauche.

Quelles que soient les forces φ, il est certain qu'on peut trouver (*art.* 140) la direction ZNO de la force qui en résulte, & que cette ligne NO sera perpendiculaire à CG prolongée. De plus, la force résultante des efforts absolus de chaque particule en vertu de sa pesanteur, sera dirigée suivant NGF, & sera $= p.m$, en appellant m la masse du corps, & p la gravité absolue. De même la ligne KGR parallèle à MS, sera la direction de la force résultante de toutes les forces π, & cette force sera $\pi.m$. Or par notre principe, il faut que la force suivant NF puisse se décomposer en trois, dont la premiere soit la force résultante du concours d'action des forces φ, la seconde la force résultante des forces π, & la troisiéme s'anéantisse. Cette troisiéme ne peut s'anéantir, que sa direction ne soit la ligne CD perpendiculaire au plan en C. De là il est aisé de voir par la seule inspection de la figure, 1°. que NO & non pas NZ sera la direction de la force résultante des forces φ,

Digitized by Google

& qu'ainſi la figure tournera de gauche à droite. 2°. Que la force ſuivant NG ſera compoſée de la force ſuivant NO, & d'une force dont la direction NL paſſera par N & par l'interſection L des lignes CD, KR. 3°. Que la figure gliſſera de G vers K, non de G vers R. 4°. La force ſuivant NF étant donnée, & les lignes NL, NO données de poſition, la force ſuivant NO ſera donnée, & par conſéquent φ. De même la force ſuivant NL ſera donnée, & comme ſon rapport avec la force $\pi . m$. eſt celui de LQ à QC, la force π ſera donnée. Donc le Problême eſt réſolu, & l'on a le mouvement de la figure au premier inſtant.

Nous avons fait voir (*art.* 84) que le centre G deſcendoit dans une ligne droite verticale. Pour ſavoir la viteſſe avec laquelle il deſcend au premier inſtant, cherchons la force accélératrice initiale, c'eſt-à-dire au premier inſtant de la deſcente. Soit (fig. 38) GF, x, & φ la force accélératrice du point G pour tourner autour de C, m la maſſe du corps, on aura 1°. la force ſuivant $NO = \varphi . m$ (*art.* 139); de plus, GF étant donnée, on doit par la nature de la courbe connoître GC, que j'appelle X, & GP que j'appelle z. La force ſuivant NR ſera à la force ſuivant NO :: le ſinus de l'angle PNG au ſinus de l'angle GNR. Donc la force ſuivant $NR = \frac{\varphi . m . GP}{GN} \times \frac{RN}{CF}$, & la force ſuivant $RL =$ la force ſuivant NR multipliée par $\frac{RG}{RN} = \frac{\varphi . m . GP}{GN} =$

$\frac{\varphi . m . GF}{CG}$. Donc la force du point G ſuivant GL, eſt à ſa force φ pour tourner autour de C:: $GF : GC$: où la force ſuivant GF eſt à la force φ (45) :: $CF : CG$; donc la force ſuivant $GF = \frac{\varphi . CF}{CG}$: mais la force ſuivant NG ($p . m$) doit être à celle ſuivant NO ($\varphi . m$) :: le ſinus de RNk au ſinus de RNG, c'eſt-à-dire :: Rk à CF; donc $\varphi = \frac{p . CF}{Rk}$; donc la force ſuivant $GF = \frac{p . CF^2}{Rk . CG}$; & comme CF, CG, Rk ſont données en x, il eſt clair qu'on aura la force initiale ſuivant CF exprimée en x.

On peut employer une Méthode analogue pour trouver la viteſſe dans les autres inſtans : mais l'article ſuivant donnera une Méthode plus ſimple.

SCOLIE I.

146. Il eſt clair par l'*art.* 84 que non-ſeulement dans

(45) La force avec laquelle le centre G s'approche du plan n'eſt plus la peſanteur ; puiſqu'une partie de cette force eſt détruite au point C comme on l'a vû. Le centre G ne s'approche du plan qu'en vertu de ſon mouvement de rotation autour de C; o quel que puiſſe être ce mouvement qu'on nomme ici φ, l'effort qui en réſulte pour s'approcher de MS ſera $\frac{\varphi \times CF}{CG}$, (comme on le verra aiſément en faiſant la décompoſition) : il n'eſt donc queſtion que de connoître φ ; or la valeur de cette force doit être conclue de la condition qu'une partie de la peſanteur du corps eſt détruite au point C.

Digitized by Google

le premier inſtant, mais dans les ſuivans, le centre de gravité G deſcendra toujours dans une droite verticale: or de-là il eſt très-aiſé ſans calcul, de trouver le mouvement de la figure. Car par un point quelconque E (fig. 36), ſoit tirée la tangente EB ſur laquelle on abaiſſera la perpendiculaire GB: lorſque G ſera à une diſtance du plan égale à GB, le point E touchera le plan.

Quand le point C (Fig. 37) n'eſt pas un point touchant, par exemple, ſi la figure donnée eſt un triangle dont C ſoit un des angles, alors le centre étant en V, le point C ſera au point E, tel que $VE = GC$.

Il ne reſte plus qu'à ſavoir le tems que la figure employe à parvenir dans chaque ſituation donnée.

Voici pour le trouver une méthode aſſez ſimple. Soit (fig. 39) $GV = u$ la quantité dont le centre eſt deſcendu après un tems quelconque t; la diſtance x du centre de gravité au plan ſera pour lors $= VF'$, & il eſt clair qu'on aura $du = -dx$ & $-ddu = ddx$; donc $x = A - u$, A étant la valeur de x lorſque $t = 0$; & l'on aura pour la force perdue verticalement par toutes les parties du corps, $pm - \frac{mddu}{dt^2}$, ou plus exactement (*art.* 27) $pm\left(1 - \frac{\theta^2 ddu}{2adt^2}\right)$. De plus l'eſpace circulaire qu'une particule quelconque du corps placée à la diſtance b du centre G, aura décrit autour de ce centre G pendant le tems t, ſera donnée en A & en u par la nature de la figure, & par conſé-

Digitized by Google

quent pourra être appellée V, & la force perdue par cette particule sera $\frac{-pddV.\theta^2}{2adt^2}$; donc (*art.* 141) nommant A' la somme des produits des particules par le quarré de leurs distances à G, il faudra que $pm\left(1-\frac{\theta^2 ddu}{2adt^2}\right)\times C'F'-\frac{pA'ddV.\theta^2}{2abdt^2}$ soit $=0$. Or $C'F'$ est donnée en A & en u par la nature de la figure.

Maintenant soit $C'F'=u'$, $ddV=rddu+sdu^2$, r & s étant des fonctions connues de u, on aura $pmu'-\frac{pmu'ddu.\theta^2}{2adt^2}-\frac{pA'rddu.\theta^2}{2abdt^2}-\frac{pA'sdu^2.\theta^2}{2abdt^2}=0$; donc faisant $at=qdu$, & substituant pour ddu sa valeur $\frac{-dqdu}{q}$ à cause que $ddt=0$, on aura l'équation différentielle $pmu'q^3du+\frac{pmu'dq.\theta^2}{2a}+\frac{pA'r\theta^2dq}{2ab}-\frac{pA'sdu.\theta^2q}{2ab}=0$; d'où l'on tirera aisément par les méthodes connues (*) la valeur de q en u, & par conséquent celle de t en u.

On peut encore employer à cette recherche le principe de la conservation des forces vives. Soit U la vitesse du centre G pour descendre verticalement, U'

(*) *Voyez* les Œuvres de M. Bernoulli, Tom. I; *Act. Erud.* 1697, &c.

la viteſſe de rotation, on trouvera très-aiſément en nommant M la maſſe du corps, que la ſomme des forces vives de chaque particule eſt $MUU + \frac{U'U'A'}{b^2}$: maintenant puiſque u eſt la quantité dont le centre eſt deſcendu pendant le tems t, on aura par le principe de la conſervation des forces vives, $2pu M = MUU + \frac{U'U'A'}{b^2}$. Or 1°. $U = \frac{du}{dt}$. 2°. L'eſpace V, décrit pendant le tems t par le mouvement de rotation, eſt donné en u, & par conſéquent on a U' ou $\frac{dV}{dt} = \frac{V'du}{dt}$, V' étant une fonction connue de u. Donc on aura $dt^2 = \frac{du^2}{2pu} + \frac{A'V'^2du^2}{2pMub^2}$; ce qui donnera t en u.

SCOLIE II.

147. Lorſque la figure ne doit faire que des oſcillations infiniment petites, la diſtance initiale GF (Pl. V. fig. 10) ne differe de la ligne GC menée au point touchant C que d'une quantité infiniment petite du ſecond ordre; d'où il eſt aiſé de conclure que le centre G ne deſcend que d'une quantité infiniment petite du ſecond ordre, au lieu que l'angle de rotation eſt infiniment petit du premier ordre. Donc on peut regarder u comme nul par rapport à V: ainſi on a pour lors $ddu = 0$ &

Digitized by Google

$pm.C'F' = \frac{pA'ddV.\theta^2}{2abdt^2}$: or imaginant les rayons osculateurs infiniment proches CR, $C'R$, on a l'angle $\frac{V}{b}$ ou son égal $FGF' = CRC' = CGC' \times \frac{CG}{CR}$; donc faisant CR, r, CG, ζ, CF, A, on aura $C'F'$ ou $C'GF'.C'G = (CGF + FGF' - CGC') \times CG = \frac{A}{\zeta} + \frac{V}{b} - \frac{Vr}{\zeta b}) \times \zeta = A + \frac{V\zeta}{b} - \frac{rV}{b}$. Donc l'équation ci-dessus deviendra $ddV = \frac{2abdt^2}{A'\theta^2} \times (mA + m\frac{V\zeta}{b} - \frac{rmV}{b})$. Telle est l'équation pour le cas des oscillations infiniment petites, ou, ce qui revient sensiblement au même, très-petites.

Si l'on suppose $\zeta < r$, enforte que $m\zeta - rm$ soit une quantité négative; & qu'on fasse attention que V & dV doivent être $= 0$, lorsque $t = 0$; on aura par les méthodes que j'ai expliquées ailleurs (*) $V = \frac{-2abmA}{A'\theta^2} \times (\text{cos.} \frac{t\sqrt{2a.(mr-m\zeta)}}{\theta\sqrt{A'}} - 1)$: $(\frac{2a[mr-m\zeta]}{A'\theta^2})$; par conséquent l'espace parcouru circulairement par les particules qui sont à la

(*) Voyez *Recherches sur le système du monde*, I. Part. art. 25. p. 30.

Digitized by Google

distance b du centre G, sera $\frac{bA}{r-G} \times \left(1 - \text{cos.} \frac{t\sqrt{2a(mr-mG)}}{\theta\sqrt{A'}}\right)$.

Si $G > r$, on aura par les formules connues $\text{cos.} \frac{t\sqrt{2ab.mr-mG}}{\theta\sqrt{A'}} = \frac{c^{\frac{t\sqrt{2a.mG-mr}}{\theta\sqrt{A'}}} + c^{\frac{-t\sqrt{2a.mG-mr}}{\theta\sqrt{A'}}}}{2}$;

quantité réelle, & qui croît à l'infini à mesure que t croît; ainsi les oscillations ne seroient plus alors infiniment petites comme on le suppose; ou, pour parler plus exactement, la solution précédente ne pourroit plus servir.

Par exemple, quand une ellipse est posée perpendiculairement sur son petit axe, & qu'on la dérange tant soit peu de cette situation, l'expérience prouve qu'elle se remet ou tend à se remettre dans son premier état, en faisant des oscillations très-petites; & c'est aussi ce qui résulte de l'équation précédente. Car alors $G < r$, puisque tout le monde sait que le rayon de la développée à l'extrémité du petit axe d'une ellipse, est plus grand que ce petit axe. Donc le cosinus d'un angle quelconque ne pouvant être plus grand que l'unité, bV ne sauroit être plus grand que $\frac{bbA}{r-G}$. Au contraire si l'ellipse est posée sur son grand axe, alors r est $< G$, & les oscillations ne sauroient être infini-

Digitized by Google

ment petites. C'eſt auſſi ce que l'expérience confirme, puiſque le corps *culbute*, & ne ſe rétablit pas dans ſa premiere ſituation.

De-là il eſt aiſé de tirer une méthode générale pour voir ſi un corps, mis d'abord en équilibre ſur un plan, puis déplacé un peu de cet état, doit s'y remettre ou *culbuter*. Tout ſe réduit à ſavoir ſi le rayon oſculateur au point touchant eſt plus grand ou plus petit que la diſtance du centre de gravité à ce point. Dans le premier cas le corps ſe rétablira de lui-même par des oſcillations infiniment petites; dans le ſecond il *culbutera*.

SCOLIE III.

148. Le Savant M. *Euler* dans le Tome VII. des *Mémoires de Peterſbourg*, s'eſt propoſé de réſoudre ce Problême VII, pour le cas ſeulement où les vacillations du corps ſur le plan doivent être infiniment petites; ſa Méthode conſiſte à faire enſorte que les momens des forces des particules pour tourner autour de C, (Fig. 36) ſoient égaux aux momens de leur gravité abſolue par rapport au point C conſidéré comme fixe; ce qui revient au même que de décompoſer la force ſuivant NF en deux, dont l'une ſoit la force ſuivant NO réſultante des forces φ pour tourner autour de C, & l'autre paſſe par les points N & C, & ſoit anéantie.

Or la force ſuivant NC ne peut être anéantie, que quand NC eſt perpendiculaire à MCS, à moins qu'on ne ſuppoſe le plan raboteux, & d'une aſpérité aſſez gran-

Digitized by Google

de, pour détruire l'effet de la force NC parallèlement au plan. Ainſi pour que la ſolution de M. *Euler* ait lieu, il faut ſuppoſer que le plan n'eſt pas parfaitement uni. C'eſt vrai-ſemblablement ce que l'Auteur veut dire par ces paroles : (*) *In hoc motu verò notandum eſt planum ſuper quo fit, aliquantulùm aſperum eſſe ponendum, ne curvæ de loco ſuo inter vacillandum dimoveri queant, quod eveniret, ſi planum maximè foret politum.* Ces paroles, *ne de loco ſuo dimoveri queant*, ſignifient ſans doute ; *de peur que les courbes, outre leur mouvement autour du point touchant, n'ayent auſſi un mouvement pour gliſſer parallèlement au plan.* Mais je ne ſai ce qui a empêché que M. *Euler* n'eût égard à ce dernier mouvement dans ſa ſolution. Ce grand Géometre m'a fait l'honneur de me mander depuis, par une Lettre du 2 Octobre 1746, que quand il avoit traité ce Problême, il ignoroit la maniere de faire entrer dans le calcul le mouvement progreſſif. Notre principe en fournit, comme l'on voit, un moyen bien ſimple.

SCOLIE IV.

149. Si la circonférence de la figure & la ſurface du plan ſur lequel elle gliſſe ne ſont pas parfaitement unies, voici comment on trouvera p & π lors les forces p & π au premier inſtant. On regardera le point C (Fig. 38) comme une petite éminence de maſſe donnée, & on ſuppoſera que l'on connoiſſe de quelle force accéléra-

(*) Page 108.

trice g ce petit corpuscule devroit être animé suivant CS ou CM, pour que si cette force étoit tant soit peu augmentée, il fût capable de surmonter la résistance provenante des inégalités du plan. On décomposera d'abord la force absolue suivant NG en deux, dont l'une soit la force cherchée suivant NO, & l'autre agisse suivant la ligne inconnue NL. Cette derniere force doit être décomposée en deux, dont l'une suivant $LK = \pi . m$, & l'autre suivant LC regardée comme poussant le point C suivant CT, donne à ce point C un effort suivant $CS =$ à l'effort connu g.

Soient les données GP, a, GN, b, GO, c, CR, e, RG, f, & l'indéterminée $GL = y$, on aura la puissance suivant NL à la puissance suivant NG $(p \times m)$ :: le sinus de l'angle GNO ou $\frac{GP}{GN}$ au sinus de l'angle ZNL ou $\frac{LZ}{NL}$; mais $\frac{GP}{GN} = \frac{a}{b}$; $LZ = GP \times \frac{OL}{OG} = \frac{a.(c+y)}{c}$; & $NL = \sqrt{[bb + yy]}$. Donc la force suivant $NL = \frac{p.m.NL.OG}{GN.OL} = \frac{p.m.c.\sqrt{bb+yy}}{b(c+y)}$. De plus la force suivant LC est égale à la force suivant NL multipliée par le rapport du sinus de l'angle NLG ou $\frac{NG}{NL}$ au sinus de l'angle RLC ou $\frac{CR}{CL}$; enfin la force suivant CS est égale à la force suivant LC, mul-

Digitized by Google

tipliée par $\frac{LR}{LC}$; d'où l'on tire $\frac{p.m.LR.GO}{OL.CR}$ ou $p.m.\frac{(y-f).c}{(c+y).e}$ pour la valeur de cette force suivant CS : soit μ la masse de la petite éminence C, il faut que $p.m.\frac{c.(y-f)}{e.(c+y)} = g.\mu$; d'où l'on tirera la valeur de y, & par conséquent les valeurs absolues des forces suivant NL, LK & NO, qui sont celles que l'on cherche.

Mais il y a ici une chose importante à observer, c'est que la force du point C suivant CS, doit être dans la même direction que celle suivant laquelle les parties du corps CRN glissent parallèlement au plan; d'où l'on voit que le point L ne peut être qu'entre R & A, A étant le point d'intersection des droites NC, RG; & l'expression de la force suivant CM sera pour lors $\frac{p.m.(f-y).c}{e.(c+y)} = g.\mu$, d'où l'on tirera la valeur de y. Si cette valeur est plus grande que GR, ou plus petite que GA, ou négative, la figure ne peut faire autre chose que tourner autour du point C, qui dans chaque instant variera, & pourra être regardé comme fixe pendant un instant.

La valeur de y est $\frac{pmfc-g\mu ec}{g\mu e+pmc}$: cette valeur dans la figure présente ne sauroit être plus grande que f, comme il est évident, puisque $pmfc-g\mu ec$

est $< g\mu ef + pmfc$; mais elle seroit négative si pmf étoit $< g\mu e$; & elle seroit plus petite que GA ou $\frac{bf}{e+b}$, si $pmfc$ étoit $< g\mu ec + gmcb + gmbf$.

Si on veut que la force nécessaire pour faire mouvoir le point C malgré la résistance du plan, ne soit pas donnée, mais seulement son rapport à la pression de ce point sur le plan, on fera RL à RC dans le rapport de la force du frottement à la force de la pression; & on aura par là le point L qui doit toujours être placé entre R & A; sinon la figure n'aura aucun mouvement parallèlement au plan.

Scolie V.

150. Pour trouver le mouvement de la figure dans les instans qui suivent le premier, on employera des méthodes analogues à celles qui ont été données ci-dessus. Tout se réduit à trouver le mouvement du centre G parallèlement & perpendiculairement au plan, & en même tems le mouvement de rotation de la figure autour de ce centre. Or soit v le mouvement du centre G suivant GK, on aura $\frac{-pmddv}{dt^2}$ ou $\frac{-pmddv.\theta^2}{2adt^2}$ pour la force perdue suivant GK, & conservant d'ailleurs les noms de l'article 146, il faudra que la force résultante de la force perdue $\frac{-pmddv.\theta^2}{2adt^2}$, de la

force auſſi perdue $\frac{-pmddu.\theta^2}{2adt^2}$, & de la force perdue de rotation, ſoit détruite. Pour cela il faut que cette force réſultante 1°. paſſe par le point touchant *C*. 2°. Qu'étant décompoſée en deux forces, parallèle & perpendiculaire au plan, ces deux forces ayant entr'elles l'équation qu'exige la loi ſuppoſée du frottement. On aura donc deux équations par le moyen deſquelles on pourra déterminer les inconnues u & v. C'eſt ce qu'il eſt inutile d'expliquer plus en détail.

Au reſte, lorſque la figure ſe meut ſur un plan qui n'eſt pas uni, & que le frottement eſt ſuppoſé proportionnel à une partie donnée de la force comprimante, les lignes *C R* & *C L* (Fig. 38) ont entr'elles un rapport conſtant; par conſéquent le centre *G* ſe meut ſur la courbe qu'il décrit, comme s'il étoit mû par une force dont la direction fît toujours avec le plan *M S* un angle conſtant.

§. III.

Des Corps qui agiſſent les uns ſur les autres par des fils, le long deſquels ils peuvent couler librement.

PROBLÈME VIII.

151. *Un fil* A N P M (Fig. 40) *de longueur donnée, étant arrêté fixement en* A *ſur un plan horizontal, & chargé de deux poids* M, P, *dont l'un* M *ſoit attaché fixement au fil, & l'autre* P, *puiſſe couler le long du fil par*

par le moyen d'un anneau; on demande le mouvement de chacun de ces deux corps, en ſuppoſant qu'ils ayent reçû l'un & l'autre une impulſion quelconque.

Soient Pp, Mm, les deux lignes parcourues par les corps P, M, dans un inſtant. Ayant décrit d'un rayon arbitraire conſtant AN l'arc Nn, & fait $n\,n = nN$, la queſtion ſe réduit à trouver la grandeur & la poſition du côté pV qui ſuit immédiatement Pp, & la poſition VT de l'autre partie du fil. Je ſuppoſe que dans l'inſtant que le corps P parcourt pV, il eût parcouru uniformément dans la direction de Pp la ligne $p\,p = p\pi + \pi\,p = Pp + \pi\,p$, & que de même le corps M eût parcouru uniformément $mo = m\mu + \mu o = Mm + \mu o$. Par notre principe, il faut décompoſer les mouvemens $p\,p$, mo chacun en deux autres px, pV, & mL, mT, tels que par les mouvemens pV, mT, les corps p, m ne ſe nuiſent point l'un à l'autre, c'eſt-à-dire qu'on ait $AV + VT = Ap + pm$, & que par les mouvemens px, mL, ces corps ſe faſſent équilibre. D'où il s'enſuit 1°. que mL doit être dans le prolongement de pm. 2°. Que le corps p pouvant couler (*hyp.*) le long du fil, il ne ſauroit y avoir d'équilibre, à moins que ſa direction px ne diviſe en deux également l'angle Apm. 3°. Enfin, que la force ſuivant mL doit être à la force ſuivant px, comme le ſinus de la moitié de l'angle Apm eſt au ſinus de cet angle entier.

Les lignes Ap, pm, px étant données de poſition,

Digitized by Google

on voit assez, que si on connoissoit la grandeur des lignes px, πp, le Problême seroit résolu, & qu'il n'y auroit plus que le calcul à faire : or 1°. les lignes px, πp doivent être telles que les angles VAp & pAP soient égaux; 2°. les lignes px & πp étant données, les lignes AV & VT sont données de grandeur & de position, & la somme de ces lignes doit être constante. On aura donc deux conditions, d'où l'on tirera deux équations qui serviront à trouver px & πp. En voici l'analyse.

Soit $AN = 1$, $Nn = dx$, $AP = y$, $pQ = dy$, le sinus de la moitié de l'angle APM, z, enfin c la longueur du fil.

1°. La différence de l'angle PAp (dx) + celle de l'angle APM $\left(\frac{2\,dz}{\sqrt{[1-zz]}}\right)$, est égale à l'angle de PM avec pm : donc cet angle de PM avec $pm = dx + \frac{2\,dz}{\sqrt{[1-zz]}}$.

2°. $\frac{pD}{Pp}$ & $\frac{PD}{Pp}$, c'est-à-dire les sinus des angles pPD & PpD, sont donnés par le sinus z & par celui de l'angle ApP; je les exprime donc ainsi (*) $\varphi\left(z, \frac{PQ}{Pp}\right)$ & $\Delta\left(z, \frac{PQ}{Pp}\right)$, ou $\varphi\left(z, \frac{y\,dx}{\sqrt{[dy^2+y^2dx^2]}}\right)$ & $\Delta\left(z, \frac{y\,dx}{\sqrt{[dy^2+y^2dx^2]}}\right)$. Donc $pD = Pp \times$

(*) Les quantités φ, Δ, mises au-devant d'une autre quantité quelconque, marqueront toujours dans la suite une fonction de cette quantité.

$\varphi\left(\zeta, \frac{y\,dx}{\sqrt{[dy^2 + y^2\,dx^2]}}\right)$ & $PD = Pp.\Delta\left(\zeta, \frac{y\,dx}{\sqrt{[dy^2 + y^2\,dx^2]}}\right)$.

3°. $PM - pm = dy$ & $mB - pD = dy - \left(dx + \frac{2\,d\zeta}{\sqrt{[1 - \zeta\zeta]}}\right)^2 . \frac{(c-y)}{2}$.

4°. Si on fait $px = \mathfrak{C}$, $\pi p = \alpha$, on aura (*art.* 92) l'angle $\pi Ap = dx - \frac{2\,dy\,dx}{y}$; $\pi Ap = \frac{\alpha\,dx}{\sqrt{[dy^2 + y^2\,dx^2]}}$; pAV ou $xAp = \frac{\mathfrak{C}\zeta}{y}$. Donc $\frac{2\,dy\,dx}{y} - \frac{\alpha\,dx}{\sqrt{[dy^2 + y^2\,dx^2]}} + \frac{\mathfrak{C}\zeta}{y} = 0$ (*A*).

5°. $A\pi = y + 2\,dy + y\,dx^2$; $Ap = A\pi + \frac{\alpha\,dy}{\sqrt{[dy^2 + y^2\,dx^2]}}$; $AV = Ap - \mathfrak{C}\sqrt{[1 - \zeta\zeta]}$. Donc $AV = y + 2\,dy + y\,dx^2 + \frac{\alpha\,dy}{\sqrt{[dy^2 + y^2\,dx^2]}} - \mathfrak{C}\sqrt{[1 - \zeta\zeta]}$: donc en supposant dx constant, on a $ddy = y\,dx^2 + \frac{\alpha\,dy}{\sqrt{[dy^2 + y^2\,dx^2]}} - \mathfrak{C}\sqrt{[1 - \zeta\zeta]}$ (*B*).

6°. Présentement, on a $\mu o = \alpha . \frac{Mm}{Pp}$; $PM - \pi\mu =$ (*art.* 90) $2\,dy - \left(dx + \frac{2\,d\zeta}{\sqrt{[1 - \zeta\zeta]}}\right)^2 (c - y)$; $\pi o = \pi\mu - o\,l$ (on suppose que μl est un arc décrit du

Digitized by Google

centre π & du rayon $\pi\mu$, & que MB eſt perpendiculaire à Bp) $= \pi\mu - \frac{\alpha . m B}{P p}$; $o p = \pi o + \frac{\alpha . p D}{P p}$; $oV = o p - \zeta V[1 - \zeta\zeta]$. Or à cauſe de l'équilibre, on a $M \times oT : \frac{P . \zeta}{2} :: 1 : V[1 - \zeta\zeta]$; donc $oT = \frac{P . \zeta}{2 M V[1 - \zeta\zeta]}$; donc $VT = oV - \frac{P\zeta}{2 M V[1 - \zeta\zeta]}$; donc $VT = c - y - 2dy + \left(dx + \frac{2 d\zeta}{V[1 - \zeta\zeta]}\right)^2 (c - y) - \frac{\alpha . m B}{P p} + \frac{\alpha . p D}{P p} - \zeta V[1 - \zeta\zeta] - \frac{P\zeta}{2 M V[1 - \zeta\zeta]}$. Cette valeur de VT ajoûtée à la valeur de AV trouvée ci-deſſus *n.* 5. doit être $= c$. De-là on tirera une équation, qui, avec l'équation (A), ſervira à chaſſer α & ζ.

7°. L'angle $AVp = ApP - dx - ppV$, & l'angle pVT ou $pVo = ppo + ppV + poV$. Or l'angle $poV = \frac{\zeta\zeta}{c - y}$, & l'angle $ppo = p\pi o - \pi o p = p\pi o - \frac{\alpha . P D}{P p . (c - y)}$; l'angle $p\pi o = p\pi\mu + \mu\pi o = p\pi\mu + \frac{\mu o . M B}{M m . (c - y)}$ $= p\pi\mu + \frac{\alpha . M B}{P p . (c - y)} = p\pi\mu + \frac{\alpha}{P p . (c - y)} \times$

$[PD+(c-y).(dx+\frac{2dz}{\sqrt{[1-2z]}})]$; l'angle $p\pi\mu$ eſt égal à l'angle Ppm, plus l'angle de $\pi\mu$ avec pm, & ce dernier angle (*art.* 90) eſt $=(dx+\frac{2dz}{\sqrt{[1-2z]}}).(1+\frac{2dy}{c-y})$; donc $AVp+pVT=ApP+Ppm-dx-ppV+(dx+\frac{2dz}{\sqrt{[1-2z]}}).(1+\frac{2dy}{c-y})+\frac{\alpha}{Pp.(c-y)}\times[PD+(c-y).(dx+\frac{2dz}{\sqrt{[1-2z]}})]-\frac{\alpha.PD}{Pp.(c-y)}+ppV+\frac{\mathfrak{G}z}{c-y}$; mais $ApP+Ppm=APM+\frac{2dz}{\sqrt{[1-2z]}}$. Donc $d(\frac{2dz}{\sqrt{[1-2z]}})=(dx+\frac{2dz}{\sqrt{[1-2z]}})\times(\frac{2dy}{c-y}+\frac{\alpha}{Pp})+\frac{\mathfrak{G}z}{c-y}$. Si on met dans cette derniere équation ainſi que dans l'équation (B), les valeurs de α & de $\mathfrak{G}$ trouvées par le *n°.* 6, on n'aura plus que deux équations qui ne contiendront que la conſtante ∂x avec les variables y & z, & leurs différences; & en faiſant évanouir la conſtante dx, on n'aura plus qu'une équation différentielle à deux variables y, z; ainſi le Problême ne dépend plus que de la ſéparation des indéterminées. On peut encore ſimplifier les équations en nommant k l'angle dont

Digitized by Google

le ſinus eſt z, ce qui donnera $\frac{dz}{\sqrt{1-zz}} = dk$, $\sqrt{1-zz} =$ cof. k, & $z =$ ſin. k.

Remarque I.

152. Si l'on attache un fil ABC (Fig. 41) fixement en A & en C, & qu'un corps B, peſant ou non, puiſſe couler librement le long du fil ABC, il eſt évident que ce corps B décrira l'ellipſe MBN, dont A & C ſont les foyers. Mais je dis de plus qu'il la décrira de la même maniere que s'il n'étoit pas attaché au fil, & qu'il deſcendit librement dans la cavité de cette ellipſe. Car lorſqu'il ſe meut librement dans l'ellipſe, la direction du mouvement qu'il perd à chaque inſtant, eſt une perpendiculaire à l'éllipſe au point où eſt le corps. Mais lorſqu'il ſe meut le long du fil ABC, la direction du mouvement qu'il perd à chaque inſtant, eſt la ligne BF qui diviſe en deux également l'angle ABC, & cette ligne BF, comme l'on ſait par les ſections coniques, eſt perpendiculaire à l'ellipſe MBN en B. Donc &c.

Remarque II.

153. Si un fil $AMBNC$ fixe en A & en C (Fig. 42) paſſe à travers un corps $KRBGL$ qui puiſſe couler librement dans ce fil, & que toutes les parties de ce corps $KRBGL$ ſoient animées de viteſſes telles qu'il ſoit en équilibre, je dis que la force réſultante doit

Digitized by Google

avoir pour direction la ligne GR qui coupe en deux également l'angle AGC, fait par les lignes AK, CL prolongées. Autrement le corps KRL, glisseroit ou vers A ou vers C, & par conséquent il n'y auroit point équilibre, ce qui est contre la supposition.

D'après cette remarque, il est aisé de trouver la courbe que décriroient les points K, L, & la viteſſe de chacun de ces points, ſi le corps avoit reçû une impulſion quelconque. Car il y a pour chaque inſtant quatre inconnues à trouver, ſavoir les directions des points K & L, & leurs viteſſes. Or il faut que ces directions & ces viteſſes ſoient telles, que $AK + CL$ faſſe une quantité conſtante, auſſi-bien que la diſtance KL: de plus, les forces perdues doivent être tellement dirigées pour chacun des points du corps KRL, que la réſultante ait pour direction GR; cette derniere condition produit deux équations. Car regardant la force perdue par chaque particule, comme compoſée de deux autres, l'une parallèle, l'autre perpendiculaire à GR, il faut que la ſomme de ces dernieres ſoit zéro, & que la direction de la force réſultante des autres ſoit GR; on aura donc en tout quatre équations & quatre inconnues, & le Problême ſera réſolu. Je n'en donne point le calcul, parce qu'on imagine bien qu'il eſt très-long & très-compliqué, & qu'il ſuffit ici d'en préſenter l'eſprit.

REMARQUE III.

154. Je ne finirai point cette matiere, ſans faire ici

une obſervation aſſez importante ſur la ſolution des Problêmes dans leſquels on ſuppoſe que les corps ſe tiennent par des fils. Comme les fils ſont ſuppoſés inextenſibles, les corps ne peuvent jamais ſe trouver à une diſtance l'un de l'autre, plus grande que la longueur qui les ſépare; mais rien n'empêche qu'ils ne puiſſent ſe trouver à une diſtance plus petite que cette même longueur. Ainſi, deux corps étant, par exemple, attachés aux deux extrémités d'un fil, ſi on leur donnoit des mouvemens tels, qu'ils pûſſent ſuivre ces mouvemens ſans que le fil s'allongeât, il eſt évident qu'ils ſuivroient ces mouvemens préciſément de la même maniere que s'ils étoient libres, & qu'il n'y auroit alors aucun Problême à réſoudre. Auſſi ne pourroit-on pas appliquer à ces ſortes de cas le principe général dont nous nous ſommes ſervis juſqu'ici: car ſi on vouloit faire uſage de ce principe, on trouveroit que les mouvemens par leſquels les corps devroient ſe faire équilibre, au lieu de tendre à allonger le fil, tendroient au contraire à en rapprocher les extrémités; & qu'ainſi, puiſque le fil ne fait aucune réſiſtance à ce dernier effort, ces mouvemens ne pourroient être détruits.

En général, quand les corps ſe tiennent par des fils, le moyen de s'aſſurer ſi les fils doivent reſter toujours tendus, c'eſt de voir ſi en les ſuppoſant tels, les forces qui doivent faire équilibre, ont des directions qui tendent à allonger le fil. Si cela eſt, on aura eu raiſon de ſuppoſer que les fils ne ſe plioient point; ſinon les corps

ſeront

Digitized by Google

ſeront mûs préciſément comme s'ils étoient libres, & qu'ils ne fuſſent pas joints enſemble. On n'a pas beſoin de prendre toutes ces précautions, quand les corps ſe tiennent par des verges inflexibles auxquelles ils ſont fixement attachés. Car leur diſtance eſt toujours néceſſairement égale à la longueur de la verge qui les ſépare, & ne peut être ni plus grande ni plus petite. Auſſi la remarque que nous venons de faire ſur le cas où les corps ſe tiennent par des fils, ſeroit inutile, ſi au lieu d'être joints par des fils, ils l'étoient par des verges inflexibles unies enſemble par des charnieres. Il y a, au reſte, une analogie parfaite entre ce dernier cas & celui des fils. Car, quand les mouvemens imprimés à des corps unis par des fils ſont tels, que les fils par leur inextenſibilité puiſſent les altérer, il arrive préciſément à ces mouvemens le même changement, que ſi les fils étoient des verges inflexibles jointes enſemble par des charnieres.

SCOLIE GÉNÉRAL.

155. Quand on applique notre principe général à la ſolution de quelque Problême de Dynamique, on pourroit craindre quelquefois de ſe tromper, en ſuppoſant mal à-propos que les mouvemens de certains corps diminuent, lorſqu'ils croiſſent réellement, & au contraire. Mais il en eſt ici comme dans une infinité d'autres Problêmes, où le calcul redreſſe de lui-même les fauſſes hypotheſes que l'on a faites en ſuppoſant négatif ce qui devoit être poſitif, ou réciproquement.

Digitized by Google

Il faudra seulement avoir attention de suivre exactement dans le calcul les suppositions qu'on a faites d'abord, & de ne point donner aux équations une forme qui contredise ces suppositions. Par exemple imaginons que α, ζ, γ, &c. soient les forces perdues par chaque corps, & que par les suppositions qu'on a faites & la figure qu'on a tracée, ces forces doivent être parallèles & dirigées dans le même sens : alors si la condition de l'équilibre demande que ces forces se détruisent mutuellement, (abstraction faite de tout point fixe, & considérant le corps comme libre), il faudra faire $\alpha + \zeta + \gamma = 0$, & non pas $\alpha + \zeta = \gamma$, ou $\alpha + \gamma = \zeta$, &c. Mais si par la supposition qu'on a faite, la force γ, par exemple, se trouvoit dirigée parallèlement aux forces α & ζ, & en sens contraire, alors il faudroit faire $\alpha + \zeta = \gamma$ ou $\alpha + \zeta - \gamma = 0$.

De même si les forces α, ζ, γ, devoient agir par des leviers x, z, y, & que ces leviers fussent tous d'un même côté, & les puissances tous du même sens, on auroit $\alpha x + \zeta z + \gamma y = 0$. Mais si y, par exemple, étoit du côté opposé à x & à z, tout le reste demeurant de même, on auroit $\alpha x + \zeta z = \gamma y$ ou $\alpha x + \zeta z - \gamma y = 0$, & ainsi du reste. De-là il s'ensuit que dans les cas proposés les équations $\alpha + \zeta + \gamma = 0$, ou $\alpha x + \zeta z + \gamma y = 0$, représentent parfaitement & en général les conditions de l'équilibre, pourvû qu'on ait soin dans ces équations de donner aux quantités α, ζ, γ, &c. & x, y, z, &c. les

Digitized by Google

ſignes qu'elles doivent avoir ſelon les ſuppoſitions qu'on a faites & les figures qu'on a tracées; il en ſera de même de tout autre cas. Avec de telles précautions on n'aura jamais à craindre de s'égarer.

§. IV.

Des Corps qui ſe pouſſent ou qui ſe choquent.

PROBLÊME IX.

156. *Un Corps dont la maſſe eſt* m, *& la viteſſe* u, *ſe mouvant ſur une même ligne avec un autre Corps dont la maſſe eſt* M *& la viteſſe* U, *trouver la viteſſe de ces Corps après le choc.*

Soit v la viteſſe du premier corps après le choc, V celle du ſecond : on fera (*art.* 61) $u = v + u - v$ & $U = V + U - V$. Il faut par notre principe, que $V = v$ & que $m(u - v) + M(U - V) = o$. Donc v ou $V = \frac{mu + MU}{M + m}$.

COROLLAIRE.

157. Si un corps M de maſſe quelconque animé d'une viteſſe donnée U, eſt choqué par un corps m infiniment petit, dont la viteſſe ſoit u, il recevra par ce choc une quantité de mouvement égale à $m(u - U)$; & ſi u eſt infiniment plus grande que U, la quantité de mouvement qu'il recevra ſera égale à mu, c'eſt-à-dire à la quan-

Digitized by Google

tité de mouvement du corps choquant. On voit par-là, que quand le mouvement d'un corps eſt accéléré ou retardé par une puiſſance impulſive, dont il reçoit, pour ainſi dire, à chaque inſtant des coups réitérés, la quantité de mouvement que le corps perd ou gagne à chaque inſtant, ne doit être regardée comme proportionnelle à la puiſſance impulſive, qu'en regardant cette puiſſance comme une maſſe infiniment petite, animée d'une viteſſe infinie par rapport à la viteſſe du corps pouſſé. En ce cas, l'effet de cette puiſſance eſt toujours le même, ſoit que le corps ſe meuve ou qu'il ſoit en repos.

Remarque.

158. C'eſt ici le lieu de prouver ce que nous avons avancé plus haut, (*art.* 22) que le principe des forces accélératrices proportionnelles à l'élément de la viteſſe, ne doit point être employé pour déterminer les mouvemens qui réſultent de l'impulſion. En effet, ſuppoſons, par exemple, qu'un corps vienne en choquer un autre en repos; la quantité de mouvement gagnée par le choqué, ſera $\frac{m\,M\,u}{M+m}$. Il faudroit donc que la cauſe productrice de mouvement fût proportionnelle à $\frac{m\,M\,u}{M+m}$. Mais 1°. comment peut-on prouver que la cauſe motrice du corps M eſt proportionnelle à $\frac{M\,m\,u}{M+m}$, plutôt qu'à une autre fonction quel-

Digitized by Google

conque des grandeurs M, m, u? Ne ſeroit-il pas même aſſez naturel de penſer que mu pourroit être regardé comme proportionnelle à la cauſe motrice, ce qui ne manqueroit pas d'induire en erreur, puiſque la quantité de mouvement du corps M n'eſt point comme mu, toutes choſes d'ailleurs égales? 2°. Quand on ſauroit que la cauſe motrice eſt proportionnelle à $\frac{Mmu}{M+m}$, on n'en pourroit rien conclure, ſinon que la quantité de mouvement du corps M, regardée comme effet de cette cauſe, ſeroit proportionnelle à $\frac{Mmu}{M+m}$, ſans ſavoir ſi elle ſeroit préciſément cette quantité même (*). Il faut donc néceſſairement employer d'autres principes, pour déterminer la quantité abſolue de mouvement du corps choqué.

LEMME IX.

159. *Soit ſur un plan* QR *un Corps* AKQR (Fig. 43) *de figure quelconque, qui puiſſe gliſſer librement ſur ce plan de* Q *vers* R, *ou de* R *vers* Q; *& ſoit un Corps quelconque* M, *placé ſur* KQ *en tel endroit qu'on voudra; ſuppoſons que le Corps* AKQR *ait ſuivant* RQ *une viteſſe quelconque, & que le Corps* M *ait une viteſſe & une direction telle qu'il faſſe équilibre au Corps* AKQR. Je dis que cela ne peut arriver 1°. que MG perpendi-

(*) Voyez l'Encyclopédie au mot CAUSE, *Tom. II. p. 790.* Voyez auſſi le mot FORCE, *Tom. VII. p. 114, col. 2.*

culaire à KQ ne ſoit la direction du corps M. 2°. Que la force du corps M ſuivant MO, & la force du corps $AKQR$ ſuivant RQ, ne ſe réduiſent à une ſeule force dont la direction ſoit perpendiculaire au plan QR.

COROLLAIRE.

160. Donc la force du corps M doit être à celle du corps $AKQR$, comme GL eſt à LS.

SCOLIE.

161. La direction de la force réſultante de celles des deux corps, doit être non ſeulement perpendiculaire au plan, mais paſſer par la baſe QR. D'où l'on voit que ſi on mene par le centre de gravité de la figure $AKQR$ une droite parallèle à QR, cette droite doit couper la ligne MO en un point, d'où l'on puiſſe mener une perpendiculaire qui tombe ſur QR.

PROBLÊME X.

162. *Suppoſant le Corps* M *animé d'une force accélératrice quelconque perpendiculaire à la baſe* QR, *& le reſte comme dans le Lemme précédent, on demande le mouvement du Corps* M *& de la figure.*

Soient AB, $B\mathfrak{C}$ (Fig. 44) deux côtés conſécutifs de la figure, tels que $AB = BV$, & ſuppoſons que tandis que le corps M parcourt AB, la figure ait parcouru Aa; enſorte que les côtés AB, $B\mathfrak{C}$ ſoient parvenus dans la ſituation aB, BD: ſoit $a\alpha = Aa$,

Digitized by Google

B b = *A* B, & enfin la ligne b δ, celle que le corps *M* parcourroit en vertu de ſa force accélératrice : les lignes $a\alpha$, B δ ſeroient celles que les deux corps parcourroient dans l'inſtant ſuivant, ſans leur action mutuelle. Au lieu de ces lignes ils parcourront, l'un la ligne a a, l'autre la ligne B ζ, terminée par le côté $b\zeta$ parallèle à βd; & il faut par notre principe que la maſſe du corps *M* animée de la viteſſe $\zeta\delta$ faſſe équilibre à la maſſe *m* de la figure, animée de la viteſſe a α. D'où il s'enſuit que $\delta\zeta$ doit être perpendiculaire à $b\zeta$, & que $m.\alpha a : M.\zeta\delta :: ib : \zeta\delta$. Donc $m.\alpha a = M.ib$; mais $ib = k\zeta - bo - a\alpha$ & $a\alpha = d(a\alpha)$; donc ſi on nomme Aa, du, BK, dy, on aura $mddu = Mddy - Mddu$, ou $ddu.(M+m) = Mddy$. Equation générale & fort ſimple pour trouver le mouvement des deux corps, quelle que ſoit la force accélératrice qui agiſſe ſur le corps *M*, pourvû que cette force ſoit toujours perpendiculaire à *Q R*.

SCOLIE I.

163. Les conſtantes qu'il faut ajoûter dans l'intégration de l'équation $Mddy = (M+m).ddu$, dépendent du premier dy & du premier du, qu'il eſt toujours facile de trouver. Par exemple, ſi la direction du mouvement du corps *M* en *A* (Fig. 45) eſt ſuivant la tangente de la courbe *A B* en *A*, il faudra tirer la tangente *A P*, & prendre $AO = \frac{PN.M}{M+m}$, pour avoir

le point O où la figure ſe trouvera, lorſque le corps M ſera en N (46).

Si le corps M agit par ſa ſeule force accélératrice ſans aucune impulſion primitive, il faudra tirer AQ perpendiculaire à BD, & prendre $AO = \frac{NQ.M}{M+m}$.

Au reſte, il eſt clair par l'article 84 que dans ce dernier cas, le centre de gravité commun des deux corps deſcend dans une ligne droite verticale.

SCOLIE II.

164. On pourroit donner pluſieurs autres ſolutions de ce Problême, qui toutes font parvenir à l'équation $Mddy = (M+m).ddu$: j'ai préféré la ſolution qu'on vient de voir à toutes les autres, parce qu'elle eſt extrêmement ſimple.

---

(46) ib (fig. 44) eſt l'eſpace que le corps parcourt de moins dans le ſecond inſtant que dans le premier, parallèlement au plan. Or la quantité dont le corps eſt retardé à chaque inſtant eſt la quantité dont il s'avance parallèlement au plan par ſon mouvement propre, moins le mouvement avec lequel la figure l'entraîne; donc puiſque $ib = ddy - ddu$, & que ddu marque ce dernier mouvement, ddy marque le premier; donc dans l'intégration de l'équation $Mddy = (M+m)ddu$, on ne doit pas toujours prendre $M \times KB$ pour l'intégrale de $Mddy$; car $\int ddy$ doit être ici la ſomme de tous les petits eſpaces que le corps M parcourt parallèlement au plan par ſon mouvement propre : or cet eſpace total eſt déterminé par la direction primitive du corps. S'il tend à ſe mouvoir au premier inſtant ſuivant AK, BK ſera $\int ddy$, puiſque ſans la ſurface courbe il ſeroit arrivé au point K; ſi au contraire il tend au premier inſtant à ſe mouvoir ſuivant AP (fig. 45), PN ſera $\int ddy$, puiſqu'en vertu de cette ſeule tendance il ſeroit venu au point P.

Tous

Tous les Problêmes analogues à celui-ci qu'on pourra propoſer, ſe réſoudront toujours par l'application de notre principe, & il n'y aura de difficulté que dans le calcul.

LEMME X.

165. *Soient deux Sphères* G, C (Fig. 36), *mûes ſuivant* G B, C D, *avec des viteſſes qui ſoient repréſentées par les lignes infiniment petites* G B, C D; *il eſt clair que ſi* D B = C G, *c'eſt-à-dire ſi* D E = B F, *les mouvemens de ces deux Sphères ne ſe nuiront point l'un à l'autre;* d'où il s'enſuit qu'en général, pour que ces Sphères ne ſe nuiſent point, il faut dans chacune que la viteſſe du point touchant *A* ſuivant la perpendiculaire *CAG* aux deux corps, ſoit la même de part & d'autre. En effet on aura pour lors *ED* = *FB*; donc *DB* = *CG*.

COROLLAIRE.

166. Si deux corps de figure quelconque ſe touchent, alors en regardant comme une petite ſurface ſphérique leur point d'attouchement commun, on verra que pour que ces deux corps ne ſe nuiſent point, la viteſſe du point d'attouchement eſtimée ſuivant une perpendiculaire aux deux ſurfaces en ce point, doit être la même pour chacun d'eux.

LEMME XI.

167. *Si tant de Corps qu'on voudra viennent ſe choquer*

de manierē, qu'en les ſuppoſant parfaitement durs & ſans reſſort, ils demeurent tous en repos après le choc; je dis que s'ils ſont à reſſort parfait, ils retourneront en arriere chacun avec la viteſſe qu'il avoit avant le choc. Car l'effet du reſſort eſt de reſtituer en ſens contraire à chaque corps le mouvement qu'il a perdu par l'action des autres.

COROLLAIRE.

168. Donc ſi tant de corps durs qu'on voudra ſe choquent à la fois, & que a, b &c. ſoient leurs viteſſes avant le choc, qui ſoient changées après le choc en a, b &c. alors regardant les viteſſes a, b &c. comme compoſées des viteſſes a, α; b, ζ; &c. les viteſſes de ces mêmes corps après le choc (dans le cas où ils ſeront élaſtiques) ſeront compoſées des viteſſes a, $-\alpha$; b, $-\zeta$; &c.

Nous ne parlerons donc dans les Problêmes ſuivans que du choc des corps durs, puiſqu'on en déduit aiſément les loix du mouvement des corps élaſtiques.

Je n'examine point ici s'il y a des corps parfaitement durs: c'eſt une queſtion qui appartient plutôt à la Phyſique qu'à la Mécanique, & je ne ſuppoſe ici des corps parfaitement durs, que comme on ſuppoſe d'ordinaire dans la Mécanique des leviers inflexibles, des machines ſans frottement &c. Je ſuppoſe auſſi comme une vérité d'expérience, que le reſſort rend à chaque corps en ſens contraire ce qu'il a perdu de mouvement par le choc, ſans examiner de quelle maniere ſe fait cette reſtitution.

Digitized by Google

Comme il eſt aſſez bien prouvé que les corps à reſſort s'applatiſſent & ſe compriment par le choc, pour ſe rétablir enſuite dans leur premiere figure, on pourroit croire que ce n'eſt pas le véritable moyen de trouver les loix du mouvement de ces corps, que de les ſuppoſer incompreſſibles, comme nous faiſons ici; & il eſt vrai que cette circonſtance de plus ou de moins doit apporter à ces loix beaucoup de changement, comme nous le ferons voir plus bas. Quoiqu'il en ſoit, nous pouvons ſuppoſer au moins que les corps changent très-peu de figure, & que la compreſſion auſſi-bien que la reſtitution ſe fait dans un tems très-petit; en ce cas, le mouvement après le choc ſera ſenſiblement le même, que ſi on conſidéroit les corps comme incompreſſibles. On réſoudroit ces Problêmes exactement, ſi on ſavoit ſuivant quelle loi la figure du corps change par la compreſſion; mais on ne peut faire ſur cela que des hypotheſes.

PROBLÊME XI.

169. *Suppoſons qu'un corps* A (Fig. 47) *en vienne choquer un autre* B O Q *en repos, ſuivant une direction* A C *qui ne paſſe pas par le centre de gravité* M *du corps choqué; on demande le mouvement de ces deux corps après le choc.*

Quelque mouvement que prenne le corps *B O Q*, il eſt certain (*art.* 76) que ſon centre *M* ira toujours en ligne droite après le choc, tandis que toutes ſes parties tourneront autour de ce même centre. Il faut de plus

Digitized by Google

par notre principe, que ſi on imprimoit à ce corps un mouvement contraire à celui qu'il a reçû par le choc, il fît équilibre avec le corps A animé du mouvement qu'il a perdu par le choc.

On a démontré plus haut (*art.* 141) que ſi le centre de gravité M d'un corps ſe meut ſuivant une direction quelconque, & que ce corps tourne en même tems autour de ſon centre, la direction de la force réſultante ſera parallèle à la direction du centre de gravité (*). Or la direction de cette force ne peut ici être que la ligne CA perpendiculaire à l'endroit A du contact; car cette force doit être détruite par une force égale du corps A, laquelle agit ſuivant AC. Donc le mouvement du centre M doit être parallèle à AC. De plus, la viteſſe de rotation doit être telle, qu'étant combinée avec le mouvement du centre M, les corps ne ſe nuiſent point, c'eſt-à-dire qu'ils ayent dans le même ſens une viteſſe égale. Or abaiſſant la perpendiculaire MN ſur CA, il eſt aiſé de voir que le mouvement du point touchant A ſuivant AN, eſt égal au mouvement du point N. La difficulté ſe réduit donc à trouver la viteſſe du point M, & la viteſſe de rotation du point N.

Soit u la viteſſe du corps A avant le choc, u ſa viteſſe après le choc, α la viteſſe de M, ν la viteſſe de rotation du point N, on aura 1°. $\alpha + \nu = u$. De

(*) Ceux qui voudront une démonſtration plus détaillée de cette propoſition, la trouveront dans nos *Recherches ſur la préceſſion des Equinoxes*, art. 86 & ſuiv. Mais la démonſtration citée de l'*art.* 141 paroît ſuffiſante.

Digitized by Google

plus, la force réſultante des mouvemens des parties du corps M en ſens contraire, doit être égale à $A.(u-\mathrm{u})$; or cette force doit être égale à $M.\alpha$, & avoir pour direction la ligne CA; on a donc 2°. $M.\alpha = A.(u-\mathrm{u})$; 3°. ſi on nomme p la ſomme des produits des parties du corps M par le quarré de leurs diſtances à M, on aura (*art.* 141) $\frac{v\,p}{M\,N} = M.\alpha.MN$. Ces trois équations ſerviront à déterminer les inconnues α, u, u. *Ce qu'il falloit trouver.*

PROBLÈME XII.

170. *Deux corps ſphériques* A, a, (Fig. 48) *attachés aux verges* C A, C a, *fixes en* C *& en* c, *ſe choquant avec des viteſſes données, trouver leurs viteſſes après le choc; on ſuppoſe qu'avant le choc ils vont tous deux d'un même côté.*

Soient u, v, les viteſſes des centres A, a, avant le choc, u, v les viteſſes de ces mêmes centres après le choc. Par notre principe, il faut que les viteſſes u, v ſoient telles, que les deux corps ne ſe nuiſent point, & que ſi leurs centres avoient les viteſſes $u-\mathrm{u}$, $v-\mathrm{v}$, les deux corps ſe fiſſent équilibre; c'eſt-à-dire que les points A, a étant animés des viteſſes $u-\mathrm{u}$, $v-\mathrm{v}$, il faut que la force du corps A regardée comme réunie en A & agiſſant ſuivant Aa, ſoit égale à la force du corps a regardée comme réunie en a & agiſſant ſuivant aA.

Digitized by Google

Si on mene les perpendiculaires CG, cg à Aa, la premiere de ces deux conditions donne $\frac{u.CG}{CA} = \frac{v.cg}{ca}$. De plus, ſi on nomme F la ſomme des produits des particules du corps A par le quarré de leurs diſtances à C, ou plutôt à l'axe qui paſſe par C, & f la quantité analogue à celle-là pour le corps a, la ſeconde condition donnera $\frac{F.(u - u)}{AC.CG} + \frac{f.(v - v)}{ac.cg} = 0$. (47). De ces deux équations on tirera la valeur de u & celle de v.

COROLLAIRE I.

171. Si les corps ſont élaſtiques, leurs viteſſes après le choc ſeront (*art.* 168) $u + u - u$ & $v + v - v$. La ſomme des forces vives après le choc, ſera $\frac{F}{AC^2}(2u - u)^2 + \frac{f}{ac^2}(2v - v)^2 = \frac{Fuu}{AC^2} + \frac{fv^2}{ac^2}$

(47) Car $u - u$ étant la viteſſe de rotation perdue par le centre A, la viteſſe perdue par tout autre point M ſera $(u - u) \times \frac{CM}{CA}$, & ſa force $(u - u) \times \frac{CM}{CA} \times M$; mais à cette force on en peut ſubſtituer une agiſſant ſuivant GA ou Aa, & qui (en conſidérant MCG comme un levier angulaire) doit être $= \frac{(u - u) \times CM^2 \times M}{CA \times CG}$ par le principe du levier : donc la ſomme des forces perdues du corps A ſera $\int \frac{(u - u) \times CM^2 \times M}{CA \times CG} = \frac{u - u}{CA \times CG} \times \int CM^2 \times M = \frac{(u - u) \times F}{CA \times CG}$. Donc &c.

$+\frac{4F}{AC^2}(uu - uu) + \frac{4f}{ac^2}(vv - vv)$.

Mais si on multiplie le premier de ces deux derniers termes par $\frac{CA}{CG} \times \frac{CG}{CA}$, & l'autre par $\frac{ca}{cg} \times \frac{cg}{ca}$, ce qui ne change point leur valeur, on verra qu'à cause de $\frac{u.CG}{CA} = \frac{v.cg}{ca}$, & de $\frac{F.(u-u)}{AC.CG} + \frac{f.(v-v)}{ac.cg} = o$, ils se détruisent mutuellement. Donc la somme des forces vives après le choc $= \frac{Fuu}{AC^2} + \frac{fvv}{ac^2}$, c'est-à-dire que la somme des forces vives avant & après le choc, est la même.

COROLLAIRE II.

172. Si les lignes CA, ca sont parallèles dans l'instant du choc, il faudra faire $CG = CA$, $cg = ca$, & le reste comme ci-dessus. Ce dernier cas a été résolu par M. *Jean Bernoulli* le fils, dans le Tome VII. des *Mémoires de Petersbourg*, en supposant les corps élastiques. Nos deux solutions sont fort différentes, quant à la méthode & quant au résultat. Car dans le Mémoire de M. *Bernoulli*, les vitesses après le choc sont exprimées par des quantités radicales; ici on peut s'assurer aisément qu'il n'y aura point de radicaux: les quantités F, f, les seules qui pûssent faire entrer des radicaux dans l'expression des vitesses, n'en contiennent point,

Digitized by Google

puiſqu'en nommant b, ζ les rayons des Sphères A, a, CN, a, cn, α, on trouve $F = (a\,a + 2\,a\,b + \frac{7}{5}\,b\,b).A$, & $f = (\alpha^2 + 2\,\alpha\,\zeta + \frac{7}{5}\,\zeta\,\zeta).a$. *Voyez-en le calcul dans le Mémoire cité de M. Bernoulli.*

Mais outre que la ſolution de M. *Bernoulli* n'eſt pas directe, étant appuyée ſur le principe de la conſervation des forces vives, cette ſolution eſt encore fondée ſur un autre principe qui n'eſt pas vrai. Ce principe conſiſte à regarder le corps A mû par la verge inflexible CA, comme ſi toutes ſes parties ſe mouvoient d'un mouvement égal à celui du centre A, & qu'en même tems le corps A tournât ſur ſon centre avec un mouvement angulaire égal à celui de la verge. En conſéquence la force du corps A eſt la même ſelon lui, que s'il n'étoit point attaché à la verge, & que toutes ſes parties euſſent une viteſſe égale à celle de ſon centre, ſans aucune rotation; ce qui me paroît contraire aux loix de la Mécanique. M. *Bernoulli* ſe contente de faire voir *art.* XV. de ſon Mémoire, que dans l'un & l'autre cas la quantité de mouvement eſt la même, ſoit que le corps tourne autour de C, ou que toutes ſes parties ſe meuvent avec une viteſſe égale à celle du centre A; ce qu'on ne peut lui conteſter. Mais dans une Sphère qui tourne autour d'un point fixe, la quantité de mouvement & la force ne ſont pas la même choſe : il faut avoir égard de plus au bras de levier par lequel chaque particule agit ; c'eſt la ſomme des produits de chaque élément par ſa viteſſe & par ſa diſtance au point fixe, qui fait la force,

&

Digitized by Google

& non pas seulement la somme des produits de chaque élément par sa vitesse.

PROBLÊME XIII.

173. *Deux Corps* A, B (Fig. 49) *attachés aux fils* CA, GB *fixes en* C *&* *en* G, *venant à se choquer; trouver leurs mouvemens après le choc.*

Soit u la vitesse du point A avant le choc pour tourner autour de C, laquelle vitesse est commune à toutes les parties du corps A; soit outre cela v la vitesse du centre de gravité du corps A avant le choc, pour tourner autour du point A par où le corps est suspendu. Soient de même U & V les vitesses qui dans le corps B avant le choc sont analogues à u & v: qu'enfin ces vitesses après le choc soient changées en u & v, U & V, qui doivent être telles, que les corps A, B aillent de compagnie sans se nuire l'instant d'après le choc, & que s'ils n'avoient que les vitesses $u-\mathrm{u}$, $v-\mathrm{v}$, $U-\mathrm{U}$, $V-\mathrm{V}$, ils se fissent équilibre.

Toutes les parties du corps A (Fig. 50) étant considérées comme animées de la vitesse $u-\mathrm{u}$, on peut réduire tous leurs mouvemens à une seule force, dont la direction OK passera par le centre de gravité G du corps A, & sera perpendiculaire à CA prolongée vers L. De plus le centre de gravité du corps A étant animé de la vitesse $v-\mathrm{v}$ pour tourner autour de A, on trouvera (*art.* 140) sans connoître la valeur de $v-\mathrm{v}$, la direction NO de la force résultante. La force suivant OP

Digitized by Google

que je suppose résulter des forces suivant OK, NO, doit s'anéantir : elle doit donc être telle, qu'on puisse la décomposer en deux autres, l'une suivant PL dans la direction de CA, l'autre suivant Pa perpendiculaire en a à l'endroit du contact des deux corps. Or comme la position des points P, O est donnée par les lignes aP, CA, NO, KO, toutes données de position ; il s'ensuit que la direction OP de la force résultante des forces suivant OK & NO est aussi donnée, & qu'ainsi le rapport de ces forces suivant OK & NO est donné. Mais en nommant m la masse du corps A, on a la force suivant $OK = m.(u - \mathrm{u})$, & (*art.* 139) celle suivant $NO = m.(v - \mathrm{v})$. Donc le rapport de $u - \mathrm{u}$ à $v - \mathrm{v}$ est donné. On trouvera par un raisonnement semblable, que le rapport de $U - \mathrm{U}$ à $V - \mathrm{V}$ est donné pour l'autre corps. On pourra donc des quatre inconnues u, v, U & V en chasser deux. On a de plus deux autres conditions à remplir ; savoir que la force suivant Pa soit égale à celle qui agit pour l'autre corps en sens contraire, & qu'outre cela ces deux corps aillent de compagnie l'instant d'après le choc, c'est-à-dire que la vitesse du point touchant a suivant Pa, soit la même pour l'un & pour l'autre : ces deux conditions donneront deux autres équations qui serviront à trouver les deux inconnues restantes, & ces équations ne passeront jamais le premier degré.

Digitized by Google

D'un Corps qui en choque plusieurs autres à la fois.

PROBLÊME XIV.

174. *Supposons qu'un corps sphérique* A, (Fig. 51) *mû suivant une ligne donnée* A Q *avec une viteſſe donnée, rencontre à la fois les deux Corps en repos* B, C, *on demande les directions & les viteſſes de ces trois Corps après le choc.*

Soit $AN = u$ la viteſſe du corps A avant le choc, AR ſa direction cherchée après le choc, & $AV = v$ ſa viteſſe après le choc; BZ, CX les viteſſes que reçoivent les corps B, C; on ſuppoſe que toutes ces lignes AN, AV, BZ, CX qui repréſentent des viteſſes, ſont infiniment petites.

La viteſſe BZ du corps B, & la viteſſe AV du corps A, doivent être telles, (*art.* 165) que $VZ = AB$. De même la viteſſe CX du corps C, & la viteſſe AV du corps A doivent être telles que $VX = AC$. De plus, ſi dans l'inſtant du choc, on ſuppoſe le corps A animé des mouvemens AV, VN, ou AV, Ap, & les corps B, C animés (*art.* 61) des mouvemens égaux & contraires BZ, $B\zeta$; CX, $C\chi$; il faut par notre principe, que les corps A, B, C, animés des mouvemens Ap, $B\zeta$, $C\chi$, ſe faſſent équilibre.

Soient les données $AQ = a$, $QS = T$, $QT = \mathrm{T}$, & les inconnues $QR = t$, $AV = v$; on aura (en menant RO perpendiculaire à AS & $R\sigma$ à AT)

Digitized by Google

$\frac{RO}{AR} = \frac{(T-t).a}{\sqrt{[a^2+T^2]}.\sqrt{[a^2+t^2]}}$; $\frac{Ro}{AR} = \frac{(T+t).a}{\sqrt{[a^2+T^2]}.\sqrt{[a^2+t^2]}}$; de plus, à cauſe de $VZ = AB$, on aura $BZ = \frac{AV.AO}{AR} = \nu\left(\frac{\sqrt{[a^2+T^2]}}{\sqrt{[a^2+t^2]}} - \frac{(T-t).T}{\sqrt{[a^2+T^2]}.\sqrt{[a^2+t^2]}}\right)$. On trouvera par un raiſonnement ſemblable $CX = \nu\left(\frac{\sqrt{[a^2+T^2]}}{\sqrt{[a^2+t^2]}} - \frac{(T+t).T}{\sqrt{[a^2+T^2]}.\sqrt{[a^2+t^2]}}\right)$.

Mais ſi on mene du point V la perpendiculaire VP ſur AN, on aura, à cauſe de l'équilibre, $A.PN = B.\frac{BZ.AQ}{AS} + C.\frac{CX.AQ}{AT}$, & $A.VP = \frac{B.BZ.QS}{AS} + \frac{C.CX.QT}{AT}$. En mettant dans ces équations au lieu des lignes qui y entrent, leurs valeurs analytiques, on parviendra à déterminer ν & t; & on verra, ſi l'on veut en faire le calcul, qu'il n'y a jamais que des équations linéaires à réſoudre. En effet, on tirera d'abord des deux équations la valeur de $\frac{\nu}{\sqrt{a^2+t^2}}$; comparant ces deux valeurs, on fera diſparoître le radical $\sqrt{a^2+t^2}$, & on aura une équation, où il n'y aura plus que t d'inconnue, & où cette inconnue ſe trouvera au premier degré :

Digitized by Google

on trouvera donc aiſément la valeur de t, qui étant miſe dans l'une des deux valeurs de $\frac{v}{\sqrt{a^2 + t^2}}$, on aura la valeur de v.

REMARQUE I.

175. Je ne m'étends pas davantage ſur la ſolution de ce Problême, & je ne cherche pas même à la ſimplifier, parce que l'on en trouve une très-belle ſolution dans l'Ouvrage de M. *Mac-Laurin*, qui a pour titre *A Treatiſe of fluxions*. On peut au reſte, par notre principe, trouver les loix du choc quand une boule en rencontre à la fois tant qu'on voudra; Problême qui a été réſolu par M. *Jean Bernoulli*, mais par le principe de la conſervation des forces vives, & ſeulement pour le cas où les boules choquées ſont égales & diſpoſées ſemblablement de part & d'autre de la direction de la boule choquante. M. *Bouguer* a auſſi réſolu ce Problême pour ce dernier cas ſeulement (*Journal des Savans*, Avril 1728) mais ſans y employer le principe de la conſervation des forces vives. M. *Bernoulli* dans ſon *Diſcours ſur le Mouvement*, a tiré de la ſolution qu'il a donnée un grand nombre de belles conſéquences ſur le mouvement des corps dans les fluides. On y trouve entr'autres pluſieurs Théorêmes qu'il n'a pas démontrés, & dont j'ai donné la démonſtration dans mon *Traité de l'équilibre & du mouvement des fluides*, Liv. III. Chap. I.

Digitized by Google

REMARQUE II.

176. Au reſte, quand on fait attention à la nature du Problême général des corps qui ſe choquent pluſieurs à la fois, avec des viteſſes & des directions données, on peut rencontrer dans le détail pluſieurs difficultés qu'il eſt bon d'éclaircir ici, & qui pourront nous donner lieu de faire ſur les loix du choc des corps, quelques obſervations nouvelles.

Suppoſons, par exemple, qu'une boule A (Fig. 52) mûe ſuivant AL, rencontre à la fois les boules C, D, E, F ſemblablement ſituées de part & d'autre de la ligne AL; que les boules F, E ſoient en repos, & que les boules C, D, ayent parallèlement à AL une viteſſe égale à celle du corps A; il eſt évident que le corps A n'aura aucune action ſur les boules C & D, & que tout ſe paſſera de la même maniere, que ſi le corps A ne touchoit que les boules E, F. Mais ſi les boules C, D avoient une viteſſe moindre que celle du corps A ſuivant AL; alors le corps A auroit de l'action ſur ces boules, & il paroît d'abord qu'il doit communiquer du mouvement à toutes les quatre.

Cependant voici une difficulté. Suppoſons que la viteſſe des boules C & D avant le choc, ne ſoit que de très-peu moindre que la viteſſe du corps A: ſi elle n'eſt que très-peu augmentée après le choc, alors, comme les boules A, C, D doivent aller de compagnie, la viteſſe de la boule A ne ſera que très-peu diminuée; de

Digitized by Google

plus les boules *F*, *E* devant aller auſſi de compagnie avec la boule *A*, auront une viteſſe qui ſera à la viteſſe du corps *A* après le choc, comme le coſinus de l'angle *BAF* au ſinus total, & qui par conſéquent ſera comme infiniment plus grande que la viteſſe perdue par le corps *A*. Mais par notre principe, le corps *A* animé de la viteſſe qu'il a perdue, doit faire équilibre aux corps *E*, *F*, *C*, *D* animés en ſens contraire de ce qu'ils ont gagné de viteſſes : or la viteſſe perdue par le corps *A* étant (*hyp.*) très-petite, ne ſauroit faire équilibre aux viteſſes finies des corps *E*, *F*. Donc la viteſſe des boules *C*, *D* ne ſauroit être de très-peu augmentée. Mais d'un autre côté ſi leur viteſſe eſt augmentée d'une quantité qui ne ſoit pas très-petite, alors elles ne pourront aller de compagnie avec le corps *A*, dont la viteſſe doit néceſſairement être diminuée.

On rencontre une nouvelle difficulté dans l'application du calcul à ce Problême. Car on trouve très-aiſément les expreſſions des viteſſes des cinq corps après le choc, quoique ſuivant la remarque que nous venons de faire, il ne paroiſſe pas qu'il doive être facile de les trouver. Cependant le calcul eſt fondé expreſſément ſur les deux conditions, que les cinq corps aillent de compagnie après le choc, & qu'animés en ſens contraire de ce qu'ils ont perdu ou gagné de viteſſe, ils ſe faſſent équilibre.

Mais ſi on examine de quelle maniere le calcul ſatisfait à ces conditions, on verra que de la façon dont

Digitized by Google

il les exprime, elles ne s'accordent pas toujours avec la nature du Problême, & peuvent même conduire à une fauſſe ſolution, ſi on ne les applique comme il faut à la queſtion propoſée. Pour que les corps, par exemple, aillent de compagnie après le choc, il faut que les viteſſes de ces corps eſtimées ſuivant une perpendiculaire à l'endroit du contact, ſoient égales entr'elles, condition que le calcul exprime. Mais il faut de plus que ces viteſſes ſoient dans le même ſens ou dans des ſens différens, ſelon l'exigence du cas : condition que le calcul n'exprime point, & ne peut exprimer. De même, pour qu'il y ait équilibre entre les corps touchans F, C, D, E & le corps A, il ne ſuffit pas que la ſomme des mouvemens de même part ſoit $= o$, ce qui eſt la ſeule choſe que le calcul exprime; il faut encore que les mouvemens faiſant équilibre, ſoient dirigés ſuivant AB, FA, CA, DA, EA.

Comme le calcul ne peut exprimer ces conditions, ce n'eſt qu'après avoir trouvé les valeurs & les directions des inconnues, qu'on peut voir ſi ces conditions ſont remplies. Si toutes les conditions ne ſont pas remplies, comme il arrive dans le cas dont il s'agit ici, c'eſt une marque qu'il y a de certains corps dans le ſyſtême qui ne ſouffrent rien de l'action des autres, & dont les mouvemens ne reçoivent aucun changement. Ainſi dans le cas préſent, quoique les corps C & D ayent une viteſſe moindre que la viteſſe du choquant A, néanmoins ces corps C & D ne recevront aucun changement, & tout

tout ſe paſſera de la même maniere, que ſi le corps *A* choquoit les deux corps *E*, *F* ſeuls. Car les corps *C* & *D* ne peuvent diminuer de viteſſe par la rencontre du corps *A*: ils ne peuvent non plus recevoir de viteſſe par l'action du corps *A*; car comme on l'a vû ci-deſſus, ces corps ne peuvent aller de compagnie avec le corps *A* après le choc. Or il n'y aura point d'action entre les corps *A*, *C*, *D* s'ils ne vont pas de compagnie après le choc. En effet, quand il y a action entre deux corps, leurs mouvemens peuvent toujours ſe réduire à des mouvemens dans le même ſens pour chacun, par leſquels ils ne ſe nuiſent point, & à des mouvemens contraires qui ſe détruiſent. Or les mouvemens contraires ne peuvent ſe détruire, que les mouvemens dans le même ſens ne ſoient égaux. Car ſi le premier corps alloit plus vîte que le ſecond, il n'y auroit entre l'un & l'autre aucune action mutuelle poſſible.

Remarque III.

177. Il n'en eſt pas de même, lorſque les corps *A*, *C*, *D*, *E*, *F* ſont des corps à reſſort. La viteſſe du corps *A* ne diminue que petit à petit & par des degrés inſenſibles; ainſi il ne peut manquer d'agir ſur les corps *C*, *D*, & par conſéquent il doit néceſſairement altérer leurs mouvemens. C'eſt pourquoi il faut bien ſe garder, pour trouver dans ce cas-là les viteſſes après le choc, de ſe ſervir de la regle que nous avons donnée *art.* 168.

Cette réflexion m'en a fait faire une autre; c'eſt que

pour les loix du choc des corps à reſſort qui ſe rencontrent pluſieurs à la fois, cette même regle peut être ſouvent très-fautive.

Suppoſons, par exemple, les cinq corps *A*, *F*, *E*, *C*, *D* (Fig. 52) à reſſort parfait; il ſe fait dans l'inſtant du choc une compreſſion dans chacun de ces corps, telle que le corps choqué reçoit à chaque inſtant en arriere, ſuivant chacune des directions *FA*, *CA*, *DA*, *EA* une quantité de mouvement infiniment petite, égale à celle que les corps *F*, *C*, *D*, *E* reçoivent en avant : ces corps s'applatiſſent ainſi de plus en plus, juſqu'à ce qu'enfin ils puiſſent aller de compagnie avec des viteſſes qui ſoient égales dans le même ſens; pour lors ils commencent à ſe rétablir peu à peu, & perdent ou gagnent de nouveau des quantités de mouvement égales à celles qu'ils ont déja perdues ou gagnées.

Mais comme nous ignorons entiérement ſuivant quelle loi le reſſort produit l'accélération dans les corps, nous ne pouvons ſavoir ſi les cinq corps ceſſent d'être comprimés tous cinq au même inſtant; & ſi, par exemple, les corps *C* & *D* ne commencent pas à ſe rétablir, quoique les corps *E*, *F* ne ſoient pas encore entiérement comprimés. En ce cas, les cinq corps n'iroient point de compagnie après le choc, en ſuppoſant même que le reſſort ne les rétablît pas dans leur premier état. Or ſi cela étoit, il ne faudroit plus pour trouver le mouvement des cinq corps après le choc, ſe ſervir de la méthode de l'*art.* 168, en regardant d'abord les cinq corps com-

Digitized by Google

mê durs; car cette méthode ſuppoſe formellement, que les cinq corps (abſtraction faite de leur reſſort) aillent de compagnie après le choc.

Une raiſon qui donne lieu de douter que la compreſſion finiſſe dans le même inſtant pour tous les cinq corps, c'eſt qu'il y a néceſſairement des cas où cela ne peut arriver, comme quand les corps C & D ſont ſuppoſés avoir une viteſſe parallèle à AL, & qui ſoit de très-peu moindre que celle du corps A ſuivant AL.

S'il y a des cas où la compreſſion des cinq corps puiſſe finir en même tems, on conçoit qu'en changeant quelques circonſtances, alors la compreſſion pourra ne pas finir dans le même tems; par exemple, ſi la boule A rencontre quatre boules C, D, E, F, égales & en repos, & que la compreſſion dans ce cas-là finiſſe au même inſtant pour toutes les boules (ce qui ne peut pourtant être prouvé) on conçoit qu'en augmentant la maſſe des deux boules C & D, il pourra ſe faire que ces deux boules achevent d'être comprimées avant les deux boules E, F, ou ne le ſoient qu'après. Il eſt donc abſolument néceſſaire de chercher comment il faut s'y prendre dans ce cas, pour avoir les loix du choc. C'eſt ce qu'on va voir dans l'article ſuivant.

Du choc des Corps à reſſort qui ſe rencontrent pluſieurs à la fois.

178. Je regarde avec pluſieurs Auteurs deux corps à reſſort A, B qui ſe choquent, (Fig. 53, 54) com-

Digitized by Google

me s'ils étoient réduits à leurs centres de gravité A, B, & qu'il y eût un reſſort placé entre deux, capable de contraction & de dilatation, ce qui repréſente la compreſſion & reſtitution ſucceſſive des deux corps. De plus comme la compreſſion ſe fait en fort peu de tems, j'imagine que ce reſſort ne ſe dilate & ne ſe contracte pas beaucoup, mais qu'étant très-peu contracté il a une très-grande force; & j'exprime cette force par une fonction de la quantité dont le reſſort eſt contracté ou dilaté, c'eſt-à-dire que je ſuppoſe proportionnelle à cette fonction la petite quantité de mouvement que l'un des corps perd, & que l'autre reçoit à chaque inſtant: car ces deux quantités de mouvement ſont égales (*art.* 157), parce que le reſſort tend à ſe débander également en ſens contraires, avec une viteſſe qu'on doit regarder comme infinie par rapport à celle des deux corps, ſa maſſe étant infiniment petite par rapport à celles de ces mêmes corps.

Cela ſuppoſé, ſi a, b (Fig. 54) ſont les points où ſont parvenus les corps A, B, & qu'on nomme Aa, x, Bb, y, & t le tems écoulé, on aura $-Addx = \varphi(x-y).dt^2$, & $Bddy = \varphi(x-y).dt^2$; d'où l'on tire $-Addx = Bddy$, & $ndt - Adx = Bdy$, n étant un nombre conſtant, qu'on déterminera de la maniere ſuivante; on ſuppoſera que a, b ſoient les viteſſes des corps A, B quand $t = 0$; on aura par conſéquent lorſque x, & $y = 0$, $\frac{dx}{dt} = a$ & $dy = bdt$: donc $n = Aa + Bb$.

L'équation intégrée donne $nt - Ax = By$, & par conséquent $-Addx = \varphi\left(x - \frac{nt - Ax}{B}\right)dt^2$; si l'on fait $x - \frac{nt - Ax}{B} = u$, on aura (à cause de dt constant) $-\frac{A.Bddu}{B+A} = \varphi u . dt^2$, & $-\frac{A.Bdudddu}{B+A} = dt^2 . du\varphi u$; d'où l'on tire $Aqdt^2 - \frac{A.Bdu^2}{2.(B+A)} = dt^2 \int du \varphi u$, & $dt = \frac{du\sqrt{B}}{\sqrt{[2.(B+A)]}.\sqrt{\left[q - \frac{\int du.u}{A}\right]}}$.

179. Au reste, si je donne ici cette solution, ce n'est pas qu'elle soit nécessaire pour trouver le mouvement des corps A, B; car dans cette hypothese il leur arrive précisément le même changement, que si la compression & la restitution se faisoient chacune dans un instant: & comme c'est principalement le mouvement après le choc qu'on cherche, que d'ailleurs la loi d'accélération ou de retardation instantanée est inconnue, il est évident que la solution précédente ne peut jetter aucune lumiere sur ce cas particulier; aussi n'est-elle ici que comme une introduction à des cas plus compliqués.

180. Dans la figure 55. imaginons que les corps A, C, D, E, F soient des points unis par des ressorts AC, AD &c. & cherchons simplement les vitesses des corps

Digitized by Google

A, F, C, parce que les corps E, D doivent ſubir préciſément les mêmes changemens que les corps F, C; ſuppoſons les corps arrivés en a, f, c; menant les perpendiculaires $a\varphi$, ax, on aura $af = \varphi f$ à cauſe que les lignes Aa, Ff ſont très-petites, le reſſort AF n'étant que très-peu compreſſible, comme nous l'avons ſuppoſé plus haut. Si on nomme p le coſinus de l'angle BAF, r celui de BAC; on aura en faiſant Aa, x, Ff, y, Cc, z; — $Addx = [2p\varphi(px-y) + 2r\varphi(rx-z)]dt^2$ (48); $Fddy = \varphi(px-y)dt^2$; $Cddz = \varphi(rx-z)dt^2$. Il y a un cas où ces équations peuvent être ſéparées en général, c'eſt celui où $\varphi(px-y) = F(px-y)$; $\varphi(rx-z) = G(rx-z)$ (G & F étant des conſtantes); en ce cas-là on peut trouver les valeurs de x, de y & de z en t, par la méthode expliquée dans la ſolution du Problême V. ci-deſſus, où nous avons enſeigné la maniere de conſtruire des équations ſemblables. Le reſſort ceſſera de ſe comprimer entre les corps A, F, lorſque pdx ſera $= dy$, & entre les corps A, C, lorſque rdx ſera $= dz$.

181. Lorſque le corps A ne choque que deux corps

(48) La quantité dont le reſſort AF eſt comprimé lorſqu'il devient af, eſt $AF - af = A\varphi + \varphi F - af$; mais $af = \varphi f = \varphi F + Ff$, comme on l'a déja remarqué; donc la quantité dont le reſſort eſt comprimé, ſera $A\varphi - Ff = px - y$. De plus la force $\varphi(px-y)$ dirigée ſuivant fa, exerce ſuivant aA une action exprimée par $p\varphi(px-y)$; la même choſe doit ſe dire du reſſort AC; donc $-Addx =$ &c.

Digitized by Google

F, E semblablement situés de part & d'autre ; ce qui arrive au corps F devant également arriver au corps E, il n'y a pas plus de difficulté, que si le corps A ne choquoit que le seul corps F, & tout se passe à peu près, comme si la compression & la restitution se faisoient en un instant ; c'est pourquoi les calculs précédens sont alors fort peu nécessaires. Ils peuvent néanmoins servir à trouver exactement la vitesse du corps A, & le chemin du corps F, qui se meut, non suivant la droite Ff, comme nous l'avons supposé, & comme on peut le supposer sans erreur, mais sur une très-petite courbe.

Les équations qu'on trouve d'abord, en supposant que F se meuve suivant Ff, & que $af = \varphi f$, sont $-Add\,x = 2p\varphi(px - y)\,dt^2$, & $Fdd\,y = \varphi(px - y)\,dt^2$. d'où l'on tire, comme dans l'*art.* 178, la valeur de x de y en t. Mais si on nomme fo, (Fig. 56) s, on aura de plus la force suivant fo égale à la force suivant ao multipliée par $\frac{fo}{ol}$, c'est-à-dire par $\frac{a\varphi}{FA}$ ou par $\frac{x\sqrt{[1-p^2]}}{a}$, (en appellant FA, a) & l'on prendra au lieu de $px - y$, la quantité plus exacte $px - y - \frac{(1-p^2)}{2a}.x^2$, parce que $AF - ao$ (en négligeant les différences troisiémes), est $A\varphi - Ff - \frac{a\varphi^2}{2FA}$ (49). On

(49) $AF - ao = A\varphi + il - i\varphi - Fl - al - lo = A\varphi - i\varphi - Ff$,

remarquera enſuite que dans la premiere des équations précédentes, au lieu de $2p$, double du cosinus de l'angle BAF, il faut mettre le double du cosinus de l'angle Bal (50), qu'on trouvera $= p - \frac{x\sqrt{[1-p^2]}}{a} \times \sqrt{[1-p^2]}$; cela posé, nommant u la distance entre les deux corps, on aura les équations $-Addx = 2p\varphi(u)dt^2 - \frac{2x(1-p^2)}{a}\varphi u.dt^2$; & (51) $Fddy = \varphi u.dt^2$; de plus on a $-du = pdx - \frac{xdx(1-p^2)}{a} - dy$, & par conséquent $-ddu = pddx - ddy - d\left(\frac{xdx.\overline{1-p^2}}{a}\right)$; ou

$$-ddu = -\frac{2ppp\varphi u.dt^2}{A} + \frac{2px(1-p^2)\varphi u.dt^2}{aA} - \frac{\varphi u dt^2}{F} - d\left(\frac{xdx.(1-p^2)}{a}\right).$$

parceque $lo = lf$ à un infiniment petit du troiſiéme ordre près, comme il eſt aiſé de le voir; de plus $i\varphi = \frac{ao^2}{2il} = \frac{ao^2}{2AF}$, en négligeant les quantités infiniment petites du troiſiéme ordre.

(50) Cos. Bal = cos. $(BAl + Ala)$ = cos. $BAl \times$ cos. Ala — ſin. BAl ſin. Ala; mais cos. $Ala = 1$, puiſque cet angle eſt infiniment petit; ſin. $BAl = \sqrt{1-p^2}$; & ſin. $Ala = \frac{ao \times 1}{al} = \frac{ao \times 1}{AF} = \frac{a\sqrt{1-p^2}}{a}$. Donc &c.

(51) Nous ſuppoſons ici que la force ſuivant Ff pour le corps F eſt la même que la force ſuivant ao, parce qu'elles ne différent l'une de l'autre que d'une quantité infiniment petite du *ſecond* ordre, & que nous n'avons égard ici qu'aux quantités infiniment petites du *premier* ordre, négligées dans le premier calcul.

Or

Digitized by Google

Or par la premiere ſolution approchée, on a une valeur de x en u, & de plus une équation ſéparée entre dt & du, c'eſt-à-dire une valeur de dt en u & du, & par conſéquent une valeur de du en u & en dt; faiſant donc les ſubſtitutions convenables, c'eſt-à-dire mettant au lieu de x ſa valeur en u dans les termes $\frac{2px(1-p^2)\phi u.dt^2}{aA}$, & $\frac{d(xdx)\sqrt{1-p^2}}{a}$, au lieu de ddx ſa valeur $\frac{-2p\phi u dt^2}{A}$, & au lieu de dx^2 ſa valeur, qu'on trouve aiſément égale au produit de dt^2 par une fonction de u, on parviendra à une équation de cette forme $-ddu = \frac{-2pp\phi u.dt^2}{A} - \frac{\phi u.dt^2}{F} + Vdt^2$, V étant une fonction de u. Or cette équation eſt intégrable. Maintenant u étant connue en t, ou plutôt t en u, on aura la valeur de x & de y par une méthode fort ſimple. Car la premiere ſolution donne $x = \Delta u$, & la ſeconde donne $dt = du\,\Gamma u$; donc mettant Δu au lieu de x dans le terme $\frac{2x(1-pp)\phi u.dt^2}{a}$, on aura $-Addx = dt^2 \Xi u$, & $-Ax + Bt + C = \int dt \int dt \Xi u$: d'où l'on aura la valeur de x en u. Celle de y ſera encore plus facile à trouver, puiſque $Fy + Dt + G = \int dt \int dt \phi u$.

On aura enfin l'équation $Fdds = \frac{xV[1-p^2]}{a} \times$

$dt^2\varphi(px-y)$; & comme x & y ſont connues en t; tout le monde voit que l'intégration eſt fort ſimple.

REMARQUE.

182. Il réſulte de l'article précédent, que quand le corps A choque deux corps à reſſort C, D (Fig. 55), également ſitués de part & d'autre de la direction AB du corps choquant, les viteſſes de ces trois corps après le choc ſont, ſinon exactement, au moins à peu près les mêmes, que ſi la compreſſion & la reſtitution du reſſort ſe faiſoient dans un inſtant. Il n'en ſeroit pas de même, ſi les boules choquées n'étoient pas ſemblablement ſituées de part & d'autre de la boule choquante.

En effet, ſuppoſons que la boule dure A mûe ſuivant AB (Fig. 57) rencontre les boules dures & en repos C, D avec une viteſſe repréſentée par $A\alpha$; ſuppoſons de plus que cette boule A ne change point de direction après le choc, & que Aa ſoit ſa viteſſe, on aura (en faiſant les parallélogrammes $An\alpha X$, $Apai$, & menant les lignes ax, ad perpendiculaires à AC, AD) (52) $C.Ax = A.iX$; & $D.Ad = A.np$: donc $iX : np :: C.Ax : D.Ad$; c'eſt-à-dire que comme $n\alpha$

(52) Les trois corps devant aller de compagnie après le choc, le corps C doit avoir la viteſſe Ax (*art.* 165), puiſque le corps A étant ſuppoſé garder la viteſſe Aa aura la viteſſe Ax dans la direction AC; mais en vertu du principe, le corps C animé en ſens contraire de la viteſſe Ax doit faire équilibre au corps A animé de la viteſſe iX qu'il a perdue; donc &c. Même raiſon de la ſeconde équation.

Digitized by Google

eſt à An, ainſi le coſinus de l'angle BAC, multiplié par C, doit être au produit du corps D par le coſinus de l'angle BAD. Donc le produit du corps C par le ſinus de l'angle BAC, & par ſon coſinus, doit être egal au produit du corps D par le ſinus de l'angle BAD, & par ſon coſinus.

Si les corps C & D ſont égaux, on aura le produit du ſinus d'un des angles par ſon coſinus, égal au produit du ſinus de l'autre angle par ſon coſinus, ce qui ne peut arriver, à moins que les angles ne ſoient complément l'un de l'autre à 90 degrés, & qu'ainſi l'angle DAC ne ſoit droit. On aura pour lors $Ai : Ax :: Ap : Ad$. Donc, ſi on ſuppoſe la ligne Aa infiniment petite, on voit que dans le cas où les trois corps A, C, D ſont à reſſort, ſi l'action des reſſorts AC, AD n'eſt pas comme les lignes Ax, Ad, le point A ſera écarté de la ligne droite Aa dès le premier inſtant, & qu'ainſi les loix du choc entre ces trois corps ſeront fort différentes de ce qu'elles ſeroient, ſi la compreſſion & la reſtitution ſe faiſoient en un inſtant.

183. Soit en général AB (Fig. 58) la direction du corps choquant, Aa la courbe qu'il décrit pendant la compreſſion & la reſtitution du reſſort, $Ai = x$, $ai = z$, $Cc = y$, $D\delta = u$, le coſinus de $DAC = r$; on aura $Ax - Cc = x + rz - y$, & $Ad - D\delta = z + rx - u$, & l'on trouvera $- Addx = \varphi(x + rz - y) \cdot dt^2$; $- Addz = \varphi(z + rx - u) \cdot dt^2$; $Cddy = \varphi(x + rz - y)\, dt^2$, $Dddu = \varphi(z + rx - u)\, dt^2$;

d'où l'on tire $-\overline{A}ddx = Cddy$, & $\overline{a}t - \overline{A}x = C\bar{y}$; & de même $-Addz = Dddu$, & $\overline{6}t - Az = Du$. On aura donc (en mettant dans les deux premieres équations, pour y & u leurs valeurs) deux équations où il ne reſtera plus que deux inconnues x, z, & qui pourront ſe conſtruire par les méthodes expliquées ci-deſſus, ſi $\varphi(x + rz - y) = F.(x + rz - y)$ & ſi $\varphi(z + rx - u) = G.(z + rx - u)$.

184. Soient deux corps A, a (Fig. 59), unis par un reſſort Aa, qui ſe choquent ſuivant AD, ad, de maniere que leur centre de gravité C reſtât en repos, s'ils pouvoient ſe mouvoir ſuivant AD, ad; ces deux corps décriront deux courbes ſemblables AG, ag pendant le tems de la compreſſion (53), & la compreſſion finira lorſque Gg ſera perpendiculaire à chacune des courbes; enſuite pendant la reſtitution du reſſort, ils décriront les courbes GF, gf ſemblables aux premieres; d'où l'on voit que leur mouvement après le choc ſera le même, que ſi la compreſſion & la reſtitution ſe faiſoit dans un inſtant. Cela eſt vrai en général, lorſque deux corps à

(53) L'état du centre de gravité ne changeant point par l'action des corps entr'eux, ce centre doit reſter en repos pendant la compreſſion, ſi, comme on le ſuppoſe, il a dû y reſter ſans la compreſſion : or dans ce cas les diſtances des deux corps à ce point immobile gardant toujours le rapport réciproque de ces deux corps, ſeront toujours dans le même rapport : donc les deux courbes AG, ag ſeront ſemblables; il en ſera de même après la compreſſion. De plus il eſt aiſé de voir que la compreſſion doit finir quand la ligne Gg qui joint les deux corps eſt perpendiculaire aux courbes qu'ils décrivent, puiſqu'ils ſont alors le plus près l'un de l'autre qu'il eſt poſſible.

Digitized by Google

reſſort viennent à ſe choquer d'une maniere quelconque ; car il eſt aiſé de voir que le mouvement de leur centre de gravité ne changeant point par leur action mutuelle, il n'y a qu'à chercher quels ſeroient leurs mouvemens après le choc s'ils venoient ſe frapper de maniere que leur centre de gravité fût en repos, & donner enſuite à tout le ſyſtême le mouvement du centre de gravité (54).

Si les deux corps étoient mous, leurs viteſſes après le choc ſeroient plus grandes que s'ils étoient durs. Car dans le cas de la dureté des deux corps, les viteſſes après le choc ſeroient aux viteſſes avant le choc, comme Cd à Ca (55) ; & dans le cas où ils ſeroient mous, c'eſt-à-dire où le reſſort ſe comprimeroit ſans ſe rétablir, ces mêmes viteſſes ſeroient comme Cd à Cg. Or $Cg < Ca$. Donc &c.

---

(54) Car ce mouvement étant commun à toutes les parties du ſyſtême, ces parties n'ont point d'autre action les unes ſur les autres que celle qui réſulteroit des mouvemens en vertu deſquels le centre de gravité reſteroit en repos. A l'égard de la viteſſe du centre de gravité on a donné le moyen de la déterminer, *art.* 72.

(55) Dans le cas des corps durs, ſi ab infiniment petite repréſente la viteſſe avant le choc, alors tirant Cbc & décrivant l'arc ac, cet arc exprimera la viteſſe après le choc, puiſque le centre eſt ſuppoſé reſter en repos & que la viteſſe perdue doit être dirigée ſuivant cb; or $ac : ab :: Cd : Ca$. Dans le cas des corps mous, la viteſſe après le choc ſera à la viteſſe avant le choc $:: Cd : Cg$; car les viteſſes d'un corps qui décrit une courbe en vertu d'une force dirigée à un point fixe, ſont en raiſon inverſe des perpendiculaires menées de ce point ſur les tangentes. Or Cg étant $< Ca$, on a $\frac{Cd}{Cg} > \frac{Cd}{Ca}$. Donc &c.

SCOLIE GÉNÉRAL.

185. Ce n'eſt-là qu'une très-petite partie des queſtions qu'on peut agiter ſur le choc des corps. En voici quelques-unes qui méritent l'attention des Géometres.

I.

Nous avons fait voir dans l'Encyclopédie au mot *Elaſtique*, Tome V. p. 447. col. 2. que le reſſort, quand il rendroit parfaitement aux corps choquans la figure qu'ils ont perdue par le choc, pourroit bien ne leur pas rendre pour cela toute leur viteſſe, & même qu'il ne la leur rendoit pas en effet. Mais la quantité de viteſſe perdue dépend de la figure & de la matiere du corps, & ne peut être déterminée que d'une maniere hypothétique & conjecturale. En effet imaginons une ſuite de points ou d'atomes parfaitement durs, diſpoſés en ligne droite; & unis par des reſſorts inſiniment petits placés entre chaque corps. Ce ſyſtême de points durs ainſi unis repréſentera aſſez exactement un corps à reſſort. Suppoſons enſuite que ce ſyſtême vienne frapper perpendiculairement un plan inébranlable, ſuivant la direction de la ligne qui enfile tous ces petits corps. Il eſt évident que le petit corps dur qui frappera immédiatement le plan, perdra à l'inſtant toute ſa viteſſe. Le ſecond corpuſcule, celui qui ſuit immédiatement le premier, pourra avancer tant ſoit peu, vû la compreſſibilité du petit reſſort placé entre deux; mais comme ce reſſort eſt (*hyp.*)

Digitized by Google

infiniment petit, qu'il doit ceſſer de ſe comprimer dès que ſes parties ſeront abſolument contigues les unes aux autres (ce qui doit arriver très-promptement), & que le ſecond corps n'auroit d'ailleurs qu'un chemin infiniment petit à faire pour arriver juſqu'au premier corps, n'eſt-il pas bien vrai-ſemblable, ou plutôt n'eſt-il pas certain que ce ſecond corps n'aura pas entierement perdu ſon mouvement, avant que d'être arrivé au point de ne pouvoir plus avancer? En ce cas ce qui lui reſte de mouvement ou plutôt de tendance au mouvement, s'anéantira tout à coup, comme quand un corps dur choque un plan inébranlable. Il en ſera de même de pluſieurs des corpuſcules ſuivans. Or tous ces corpuſcules qui n'ont perdu qu'une partie de leur mouvement par la compreſſion des reſſorts, & qui n'ont pû faire uſage du reſte, ne recevront par la reſtitution du reſſort que la partie de mouvement que la compreſſion du reſſort leur avoit fait perdre, & ne pourront jamais recouvrer l'autre partie qui a été entiérement détruite. Cependant chaque reſſort ſe rétablira dans ſon premier état, & par conſéquent le ſyſtême reprendra ſa premiere figure & non ſa premiere viteſſe. Mais on ſent bien qu'il eſt très-difficile, & comme impoſſible, de trouver la viteſſe de chaque petit corps après la reſtitution du reſſort, & par conſéquent la viteſſe totale du corps qui eſt égale à la ſomme des viteſſes partielles diviſée par le nombre des corpuſcules. Pour trouver la viteſſe de chaque petit corps, il faudroit connoître le degré d'étendue & de

Digitized by Google

roideur de chaque reſſort, ce qui doit varier dans chaque cas.

Ce que nous venons de dire du choc d'un corps à reſſort contre un plan inébranlable, doit avoir lieu de même dans le choc mutuel de deux corps à reſſort, qui doivent néceſſairement perdre quelque partie de leur viteſſe par le choc.

On ſuppoſe ordinairement que quand un corps à reſſort choque un plan inébranlable, il n'y a que la partie infiniment petite placée au point de contact qui perde tout d'un coup ſon mouvement, & que les autres parties ne perdent le leur que peu à peu, & ſont toujours en mouvement pour s'approcher du plan juſqu'à ce que le reſſort ſoit tout à fait bandé. Le raiſonnement précédent ſuffit pour montrer combien cette hypotheſe eſt peu conforme à la nature.

II.

Nous avons ſuppoſé dans tout le cours des Recherches précédentes, que quand deux corps à reſſort ſe choquent avec des viteſſes qui ſont en raiſon inverſe de leurs maſſes, le reſſort des deux corps eſt ſemblablement & également bandé à chaque inſtant, enſorte que les viteſſes perdues à chaque inſtant ſont en raiſon inverſe des maſſes, & que le point d'attouchement reſte en repos pendant tout le tems que le reſſort ſe bande & ſe débande. Or ſi le reſſort des deux corps n'eſt pas ſemblable, cette ſuppoſition n'aura pas lieu, ce qui peut

peut apporter du changement dans les solutions.

C'est donc une supposition trop limitée & trop peu générale, que celle qui a été faite par plusieurs Auteurs, pour expliquer les loix du choc des corps à ressort. Ils imaginent un ressort placé entre les deux corps, & également bandé par l'un & par l'autre, ensorte que chaque corps perde à chaque instant des quantités de mouvement égales, & que le point du ressort placé au centre de gravité des deux corps reste en repos. Il est visible que cette supposition ne peut représenter clairement que le seul cas où le point de contact reste en repos pendant que les deux corps se compriment & se rétablissent.

III.

Si un corps à ressort vient choquer perpendiculairement un plan inébranlable, & qu'on suppose ce corps à ressort parfait, c'est-à-dire capable de reprendre par son ressort la vitesse qu'il a perdue par le choc, il est évident que ce corps rejaillira après le choc avec toute sa vitesse. Mais si dans l'instant où le corps est entiérement applati, & a perdu toute sa vitesse par le bandement du ressort, on vient tout à coup à ôter le plan, il est évident que le ressort étant alors absolument libre, tend à se débander en deux sens contraires, & que les mouvemens qu'il tend à imprimer étant opposés, doivent se détruire mutuellement; d'où il s'ensuit que le corps rejaillira avec une vitesse beaucoup moin-

Digitized by Google

dre que dans le premier cas; il pourra même arrivet qu'il ne rejailliſſe point du tout, ſi la figure du corps dans ſon état de compreſſion étoit telle, que le reſſort ſe débandât également dans les deux ſens contraires. Par la même raiſon ſi on ôte le plan dans le tems où le reſſort n'eſt pas encore tout-à-fait débandé & rétabli, le corps rejaillira évidemment avec moins de viteſſe que dans le cas du plan immobile.

Or quand le reſſort des deux corps eſt parfaitement ſemblable, enſorte qu'ils ſe bandent & ſe débandent en même tems, le point de contact demeurant immobile durant tout ce tems, ces corps ſe ſervent mutuellement d'un appui inébranlable; & l'on conçoit qu'ils doivent rejaillir avec leurs premieres viteſſes. Mais ſi un des reſſorts eſt débandé avant l'autre, le corps dont le reſſort eſt débandé ne peut-il pas alors ſe ſéparer de l'autre corps, & la viteſſe avec laquelle ce dernier rejaillit n'en ſera-t-elle pas diminuée ?

IV.

Quelles ſont les loix du choc d'un corps dur contre un corps à reſſort ? Elles ſe réduiſent à ſavoir ce qui arrivera, quand deux corps, l'un dur, l'autre à reſſort, ſe choquent en ſens contraire avec des viteſſes réciproquement proportionnelles à leurs maſſes. Il eſt évident que dans ce cas le point de contact ne peut être immobile, comme dans celui où les deux corps ſont à reſſort, & à reſſort ſemblable. Le point immobile (car il

Digitized by Google

faut qu'il y en ait un) ſera donc dans l'intérieur du corps à reſſort. Mais ce point immobile ſera-t-il toujours le même, ou changera-t-il à chaque inſtant pendant que le reſſort ſe bande & ſe débande ? Il me ſemble qu'il doit changer de place. En effet 1°. dans le premier inſtant de la compreſſion le point immobile doit ſe trouver infiniment proche du point de contact, ou pour parler plus exactement, très-proche. Car ſi ce point n'étoit pas très-proche du point de contact, il faudroit donc que la partie finie du corps à reſſort, placée entre ce point & le point de contact, changeât bruſquement ſa viteſſe de poſitive en négative, ce qu'on ne peut ſuppoſer dans un corps à reſſort tel que celui dont il eſt queſtion, & dans lequel toute partie finie doit être ſuppoſée perdre ſa viteſſe par degrés. Pour le faire ſentir, nommons a la viteſſe poſitive avant le choc, & $-b$ la viteſſe devenue négative dans la partie du corps dont il s'agit; il s'enſuivroit donc que cette partie auroit perdu la viteſſe $a+b$ qui auroit été détruite *bruſquement*. Or cela ne ſe peut dans un corps à reſſort tel qu'on le ſuppoſe. Le point immobile ſera donc au premier inſtant comme infiniment près du point de contact. 2°. Dans les inſtans ſuivans, comme les parties du corps dur ne peuvent céder, & qu'elles avancent toujours, il eſt évident qu'elles doivent faire reculer le point immobile, lequel ſe trouve trop près du point de contact, & par conſéquent du corps dur, pour reſter toujours à la même place. Le point immobile changera donc pendant que le reſſort ſe bande.

Le reſſort ſe débandant enſuite, le point immobile ſubira en ſens contraire tous les changemens qu'il avoit ſubis pendant la compreſſion; & chacun des deux corps recevra en ſens contraire à chaque inſtant la viteſſe qu'il avoit perdue par le choc. Donc au dernier inſtant de la reſtitution la viteſſe de chaque corps ſera la même (en ſens contraire) qu'au premier inſtant de la compreſſion. Ainſi les deux corps reprendront en arriere toute leur viteſſe, & les loix du choc des corps durs & des corps à reſſort parfait ſeront les mêmes que ſi les corps qui ſe choquent étoient tous deux à reſſort parfait.

On voit par ces différentes obſervations, que nous pourrions étendre encore plus loin, combien de recherches il reſte à faire ſur les loix du choc des corps, & combien il s'en faut que la matiere ait été épuiſée par le grand nombre de Géometres qui l'ont traitée juſqu'ici; ces Géometres n'ayant examiné que les cas les plus ſimples & les moins ordinaires.

CHAPITRE IV.

Du Principe de la conſervation des forces vives.

186. SI des corps agiſſent les uns ſur les autres, ſoit en ſe tirant par des fils ou des verges inflexibles, ſoit en ſe pouſſant, pourvû qu'ils ſoient à reſſort parfait dans ce dernier cas, la ſomme des produits des maſſes

Digitized by Google

par les quarrés des viteſſes, fait toujours une quantité conſtante; & ſi ces corps ſont animés par des puiſſances quelconques, la ſomme des produits des maſſes par les quarrés des viteſſes à chaque inſtant, eſt égale à la ſomme des produits des maſſes par les quarrés des viteſſes initiales, plus les quarrés des viteſſes que les corps auroient acquiſes, ſi étant animés par les mêmes puiſſances, ils s'étoient mûs librement chacun ſur la ligne qu'il a décrite. C'eſt dans ces deux principes que conſiſte ce qu'on appelle *la conſervation des forces vives.*

M. *Huyghens* eſt le premier, que je ſache, qui ait fait mention de ces deux principes, & M. *Bernoulli* le premier qui en ait fait voir l'uſage, pour réſoudre élégamment & avec facilité pluſieurs Problêmes de Dynamique. J'entreprends de donner dans ce Chapitre, ſinon une démonſtration générale pour tous les cas, au moins les principes ſuffiſans pour trouver la démonſtration dans chaque cas particulier.

187. Imaginons d'abord deux corps A, B (Fig. 60), d'une étendue infiniment petite, attachés à la verge inflexible AB; & ſuppoſons qu'on imprime à ces corps des directions & des viteſſes quelconques, repréſentées par les lignes infiniment petites AK, BD. Il faut par notre principe, faire les parallélogrammes MC, NL, tels que $LC = AB$, & $B \times BM = A \times AN$; BC & AL ſeront les viteſſes & les directions des corps B & A. Or $BC^2 = BD^2 - 2CE \times CD - CD^2$, & $AL^2 = AK^2 + 2PL \times KL - KL^2$; donc $B.BC^2 + A.AL^2$

$= A.AK^2 + B \times BD^2 + A(2PL.KL - KL^2) - B(2CE.CD + CD^2)$ qui se réduit à $A.AK^2 + B.BD^2 - A.KL^2 - B.CD^2$, à cause que $CE = PL$ & $A.KL = B.CD$.

On a donc $B.BC^2 + A.AL^2 = A.AK^2 + B.BD^2 - A.KL^2 - B.CD^2$.

COROLLAIRE I.

188. Si NA, BM sont infiniment petites, c'est-à-dire si les vitesses AL, BC, ne diffèrent qu'infiniment peu des vitesses AK, BD, la conservation des forces vives aura lieu. Car négligeant dans l'équation les lignes KL, CD, on aura $B.BC^2 + A.AL^2 = A.AK^2 + B.BD^2$.

COROLLAIRE II.

189. Si NA, BM ne sont pas infiniment petites, & qu'on fasse $CF = CD$, $LO = LK$, & en sens contraire, il est aisé de prouver que $BF^2 = BD^2 - 4CE.CD$, & $AO^2 = AK^2 + 4PL \times KL$. Donc $B.BF^2 + A.AO^2 = B(BD^2 - 2BM.2CE) + A(AK^2 + 2.AN \times 2PL) = B.BD^2 + A.AK^2$, parce que $CE = PL$ & $A.AN = B.BM$.

Donc la conservation des forces vives a encore lieu ici. Mais, si l'on y fait attention, ce cas est précisément celui du choc de deux corps élastiques (*art.* 168).

De la conservation des forces vives dans les corps qui se tirent par des fils ou par des verges inflexibles.

190. Nous avons vû dans l'article précédent, que si

Digitized by Google

deux corps ſont attachés au bout d'une verge inflexible, & qu'on leur donne à chacun une viteſſe quelconque, la conſervation des forces vives n'a lieu que quand les viteſſes qu'ils prennent différent infiniment peu des viteſſes qu'ils ont reçûes. Or la viteſſe initiale réelle de chacun de ces corps, peut différer d'une quantité finie de celle qu'on a imprimée à chacun ſuivant une direction quelconque. Mais quand ils ont une fois commencé à ſe mouvoir chacun ſur ſa courbe, leur viteſſe ne varie qu'infiniment peu d'un inſtant à l'autre (56). Ainſi dans le cas de l'article 188 la ſomme des produits de chaque maſſe par le quarré de ſa viteſſe eſt toujours égale, non à la ſomme des produits de chaque maſſe par le quarré de la viteſſe imprimée à chacune au premier inſtant, mais par le quarré de la viteſſe initiale réelle de chacune.

191. Il faut donc préſentement démontrer en général, que ſi des corps ſe meuvent en ſe tirant par des fils ou

(56) Que les corps A & B joints par la ligne inflexible AB (Pl. V. fig. 15) ayent décrit dans un inſtant les lignes infiniment petites AC, BD, & que dans l'inſtant ſuivant au lieu de décrire $CE = CA$, $DF = DB$, (comme ils l'auroient fait s'ils euſſent été libres) ils décrivent CH, DK; je dis que les lignes EH & FK qui repréſentent les mouvemens perdus ſeront infiniment petites du ſecond ordre.

Car quelle que puiſſe être la poſition des points H & K, le centre de gravité g' doit être dans la ligne droite Gg qu'il a décrite au premier inſtant, & l'on doit avoir $g'g = Gg$ (*art.* 76); donc $g'H = gC = AG$; mais (*art.* 91) $Eg' - AG$ ou (ce qui eſt ici la même choſe) $Eg' - g'H$ eſt égal à 2 ($AG - Cg$) moins une quantité infiniment petite du ſecond ordre; donc puiſque $AG = Cg$, $Eg' - g'H$ eſt infiniment petite du ſecond ordre; donc EH l'eſt auſſi; la démonſtration eſt la même pour FK. Donc &c.

par des verges inflexibles, & que la viteſſe de chacun ne varie à chaque inſtant qu'infiniment peu, la ſomme des produits des maſſes par les quarrés des viteſſes ſera conſtante, ſi les corps ne ſont animés d'aucune puiſſance; & que s'ils le ſont, elle ſera égale à la ſomme des effets des forces motrices pour chaque corps.

Or j'obſerve d'abord, que le ſecond de ces deux cas ſuit immédiatement du premier; c'eſt-à-dire que le premier étant ſuppoſé vrai, le ſecond l'eſt auſſi néceſſairement. Car ſuppoſons deux corps A, a (Fig. 61) attachés l'un à l'autre par la verge Aa, & animés par des puiſſances motrices dirigées ſuivant les lignes quelconques EF, ef, dont la poſition à chaque inſtant ſoit telle qu'on voudra; que BA, ab ſoient les lignes que ces corps ont décrites pendant un même inſtant, & qui peuvent par conſéquent repréſenter leurs viteſſes. Si chacun de ces corps étoit libre, ils décriroient dans l'inſtant ſuivant les lignes AO, ao égales & en ligne droite avec AB, ab; ſuppoſant que AD, ad repréſentaſſent l'effet des puiſſances motrices pendant cet inſtant, leurs viteſſes ſeroient changées en AN, an; & menant les perpendiculaires BC, bc ſur AC, ac, on auroit $AN^2 = AB^2 + 2.AD.AC$, & $an^2 = ab^2 + 2.ad.ac$; mais comme les viteſſes AB, ab ſont les viteſſes réelles que les corps ont dans le premier inſtant, & que les viteſſes AN, an n'en différent qu'infiniment peu, ces mêmes viteſſes AN, an ne différeront qu'infiniment peu des viteſſes dans leſquelles elles ſeront changées par l'action réciproque des deux corps.

Donc,

Digitized by Google

Donc, si on nomme V, v les vitesses AB, ab; U, u les vitesses des corps A, a au second instant, c'est-à-dire les vitesses qu'ils ont au lieu de AN, an, on aura $A.UU + a.uu = A.AN^2 + a.an^2 = A(AB^2 + 2AD \times CA) + a(ab^2 + 2ad.ca) = A.VV + a.vv + 2A.AD.CA + 2a.ad.ca$. Donc $A(UU - VV) + a(uu - vv) = 2A.AD.CA + 2a.ad.ca$, c'est-à-dire $2AVdV + 2avdv = 2A.AD.CA + 2a \times ad.ca$, ou (supposant $V = 0$ & $v = 0$ au commencement du mouvement) $AVV + avv = \int 2A.AD.CA + \int 2a.ad.ca$. Mais si les corps A, a se mouvoient librement sur les courbes GA, ga, il est clair que $\int 2A \times AD.CA$ seroit l'effet de la force motrice de A depuis G jusqu'en A, & de même $\int 2a.ad.ca$ l'effet de la force motrice de a depuis g jusqu'en a (57). Donc &c.

Si au commencement du mouvement, on avoit $V = B$, $v = b$, il est évident qu'on auroit alors $AVV + avv = ABB + abb + \int 2A.AD.CA + \int 2a.ad.ca$.

On voit aisément que cette démonstration peut s'étendre à tel nombre de corps qu'on voudra; car tout ce qu'on y a supposé, c'est que si la vitesse ne varie qu'infiniment peu d'un instant à l'autre, & que les corps ne soient

(57) La force accélératrice en A étant représentée par AD, son action suivant la courbe sera $\frac{AD \times AC}{AB}$; donc si u' est la vitesse du corps A mû librement sur GA, on aura $\frac{AD \times AC}{AB} \times AB = u'du'$, ou $A \times AD \times AC = Au'du'$: donc $2\int A \times AD \times AC = Au'u'$; or ce qu'on appelle ici l'effet d'une force motrice, est le produit de la masse par le quarré de la vitesse que cette force peut imprimer.

Digitized by Google

point animés de forces accélératrices, la somme des produits des masses par les quarrés des vitesses fait toujours une somme constante. C'est donc ce qui nous reste à démontrer en général. Pour cela nous avons besoin des Lemmes suivans.

LEMME XII.

192. *Soit un parallélogramme quelconque* B V b N (Fig. 62); *je dis, que si par un de ses angles quelconques* B, *on tire à volonté la ligne* B D *de grandeur & de position quelconque, & que du point* D *on tire les perpendiculaires* D n, D K, D G *sur* B b, B V, B N *prolongées; on aura* B b . B n = B V . B K + B N . B G.

DÉMONSTRATION.

Des points *N*, *V*, *b* soient menées les perpendiculaires *N E*, *V F*, *b H* sur *B D* prolongée; on peut regarder les côtés *B V*, *B N* comme représentant des puissances décomposées chacune dans les deux *B F*, *V F*, & *B E*, *E N*; & de même la diagonale *B b* comme une puissance décomposée dans les deux *B H*, *b H*. Donc, puisque la puissance *B b* équivaut aux deux *B N*, *B V*, on aura *B E* + *B F* = *B H*: or à cause des triangles semblables *b H B*, *B D n*, on a *B b* × *B n* = *B D* × *B H* = *B D* × *B E* + *B D* × *B F* = *B N* . *B G* + *B V* . *B K*. *Ce qu'il falloit démontrer* (*).

(*) On pourroit démontrer cette proposition, par des principes purement géométriques, sans avoir recours à la Mécanique; mais la démonstration que nous avons donnée, fait voir comment les différentes parties des Mathématiques peuvent s'éclairer mutuellement.

Digitized by Google

Remarque.

193. On voit aiſément, que ſelon la poſition des points E, F l'un par rapport à l'autre & par rapport au point H, il faudra au lieu de la ſomme des produits $BN.BG$, & $BV.BK$ prendre leur différence, & la faire égale à $Bb.Bn$.

De la conſervation des forces vives quand les corps, regardés comme des points, ſe tiennent par des fils.

194. Imaginons que trois corps A, B, C (Fig. 63), ſoient attachés au fil ABC, & qu'on imprime à ces corps les viteſſes $Aa, B\mathfrak{C}, Cx$, qu'ils ſoient forcés de changer par leur action mutuelle dans les viteſſes AA, BD, CC, qui ſeront telles, que $AD = AB$; $DC = BC$: il faudra regarder par notre principe les viteſſes $Aa, B\mathfrak{C}, Cx$, comme compoſées des viteſſes AA, BD, CC, & des viteſſes Aa, Bb, Cc par leſquelles ſeules les corps A, B, C ſe feroient équilibre; il faut donc prouver que $A.AA^2 + B.BD^2 + C.CC^2 = A.Aa^2 + B.B\mathfrak{C}^2 + C.Cx^2$, c'eſt-à-dire (58) que $A.Aa.AQ - B.BN \times BG + B.BV.BK - C.Cc.CM = o$. Or $CM = BK$, & $C.Cc = B.BV$, à cauſe de l'équilibre. De même $AQ = BG$, & $A.Aa = B.BN$. Donc &c.

Si au lieu du corps A on ſuppoſoit un point fixe autour duquel les corps B, C tournaſſent, on auroit $AQ = o$,

(58) Cette équation revient au même que la précédente, en ſubſtituant dans celle-ci à la place de AA^2, BD^2, &c. leurs valeurs qu'on trouve aiſément par les propriétés connues des quarrés des côtés des triangles, en ayant de plus égard à l'article 193. précédent, & en négligeant les quantités infiniment petites du ſecond ordre.

Digitized by Google

$BG = o$, & la proposition seroit encore vraie. Il est visible par la nature de la démonstration précédente, qu'elle est générale pour tel nombre de corps qu'on voudra.

Si le point B n'étoit pas fixe en sa place, mais pouvoit couler librement le long du fil, alors Bb diviseroit l'angle ABC en deux également, & on auroit $A.Aa = B.BN$; $B.BV = C.Cc$; $B.BN = B.BV$; & enfin $AQ - BG = BK - CM$, parceque $AD + DC = AB + BC$; donc $A.Aa.AQ - B.BN.BG + B.BV.BK - C.Cc.CM = o$.

On voit donc suffisamment que la conservation des forces vives a lieu dans tous les cas possibles, quand les corps ne sont regardés que comme des points, & se tiennent par des fils.

LEMME XIII.

195. *Soient trois corps* A, B, C *animés des puissances* AQ, BR, Cc (Fig. 64), *& en équilibre sur un levier de figure quelconque; & soient* AB, BC *les distances de ces corps l'un à l'autre. Imaginons le levier dans une autre situation quelconque infiniment proche de celle-là, & que les points* F, G, E *soient alors le lieu des corps* A, B, C, *de sorte que* FG = AB; GE = BC : *je dis qu'en menant les perpendiculaires* GK, FX, EZ, *on aura* B.BR.BK = A.AQ.AX + C.Cc.CZ.

DÉMONSTRATION.

Tant que le levier ABC n'est pas droit, cette proposition peut se démontrer de la même maniere que si

Digitized by Google

ABC étoit un fil, parceque chacune des puiſſances peut toujours ſe changer en deux autres, dont la direction paſſe par les points où les deux autres ſont appliqués, & que l'on aura ainſi ſix puiſſances, égales deux à deux & directement oppoſées. *Voy. les art.* 192, 193, 194.

Il n'y a que le ſeul cas où le levier ABC (Fig. 65) eſt droit, dans lequel une pareille décompoſition ne ſe peut faire, & pour lequel il eſt néceſſaire de trouver une démonſtration particuliere. Soient donc AQ, BR, Cc perpendiculaires au levier ABC, on aura $B.BR.BO$ (59) $= C.Cc.CL + A.AQ.AY$; mais les lignes $BO, BK; CL, CZ; AY, AX$ ne différent l'une de l'autre que d'une quantité infiniment petite par rapport à elles. Donc $B.BR.BK = C.Cc.CZ + A.AQ.AX$. Donc &c. *Ce qu'il falloit démontrer.*

REMARQUE.

196. Si le levier ABC (Fig. 66) étoit fixe en quelque point, en Γ par exemple, & qu'on imaginât le levier dans une autre ſituation $F\Gamma GE$, la propoſition ſeroit encore vraie, & ſe démontreroit d'une maniere ſemblable.

De la conſervation des forces vives, quand les corps ſe tiennent par des verges inflexibles, & qu'on les regarde comme des points.

197. Il eſt clair que par le Lemme précédent (60) on

(59) Par la propriété connue des momens de pluſieurs forces en équilibre, entr'elles.

(60) Il n'y aura qu'à conſidérer $AQ, AF; BR, BG; Cc, CE$ (fig. 64)

démontrera la conſervation des forces vives, quand les corps ſe tiennent par des verges inflexibles, & que chacun de ces corps eſt fixe à la verge. Si l'un des corps comme B (Fig. 64) pouvoit couler le long de la verge, alors la viteſſe BR qu'il perdroit, devroit être perpendiculaire à la verge, & il ſe trouveroit dans l'inſtant ſuivant, non au point G tel que $FG = AB$, mais à un point g infiniment proche de celui-là (*). Or à cauſe que les points B, G ſont infiniment proches, & que Gg, BA doivent être cenſées parallèles, la ligne Gg doit être regardée comme perpendiculaire à BK, & partant on peut prendre Bk & BK l'une pour l'autre, parceque leur différence eſt infiniment petite du ſecond ordre. Donc la conſervation des forces vives a encore lieu dans ce cas.

De la conſervation des forces vives, quand les corps ſont de maſſes finies, & qu'ils ſe tiennent par des fils ou par des verges inflexibles.

198. Nous avons vû dans le Lemme XIII. que ſi trois corps A, B, C animés des forces AQ, BR, Cc de directions quelconques, ſont en équilibre, on aura $C.Cc.CZ + A.AQ.AX = B.BR.BK$. D'où il s'enſuit, que ſi on prend Br égale & contraire à BR (Fig. 64), c'eſt-à-dire ſi on cherche la force réſultante des deux puiſſances

comme les viteſſes détruites, & les viteſſes reſtantes aux corps A, B, C, & ſuivre exactement le même procédé qu'à l'article 195.

(*) On ſuppoſe ici que le levier ABC eſt une courbe auſſi-bien que FGE, & que BR eſt perpendiculaire à cette courbe en B. Il a paru inutile de faire pour cela une nouvelle figure.

Digitized by Google

$C.Cc, A.AQ$, on réduira toujours $C.Cc.CZ + A.AQ.AX$ à un seul produit $B.Br.BK$. Ainsi quel que soit le nombre des corps attachés à une verge inflexible, si on prend le point B par où passe la force résultante, & qu'on imagine ce point B parvenu en G, il suffira de prendre le produit de BK par la force résultante, au lieu de la somme de tous ces produits.

Or pour que la conservation des forces vives ait lieu, il faut, comme nous l'avons vû, que la somme de tous ces produits soit $= o$. Donc il faut, ou que la force résultante soit $= o$, ou que BK soit $= o$. Or 1°. quand il n'y a pas de point fixe, la force résultante est $= o$. 2°. Quand il y en a un, la vitesse du point B doit être nulle, ou au moins sa direction est nécessairement perpendiculaire à la direction de la force résultante. En effet, si l'obstacle est un point Mathématique, comme le point d'appui d'un levier, la direction de la force résultante passe par ce point d'appui, & le mouvement du point B est un mouvement de rotation autour de ce point, ou le point B n'est autre chose que le point d'appui même, dont le mouvement est zéro. Si l'obstacle est une surface immobile, le point B par où passe la direction de la force résultante est nécessairement un point qui touche cette surface, & dont le mouvement instantané est suivant la direction de cette surface même, tandis que la direction de la force résultante est perpendiculaire à cette surface. Donc en général $BK = o$, quand il y a un point fixe. Il est donc démontré, que quand les corps se tiennent par des leviers

Digitized by Google

inflexibles, fixes ou non fixes, la conservation des forces vives a lieu.

199. Si les corps se tiennent par des fils, alors on imaginera aux extrémités de chaque portion de fil qui est entre deux corps, deux puissances égales & opposées qui tirent dans la direction du fil, & la démonstration se déduira aisément de ce qui a été dit ci-dessus (*art.* 194) quand les corps étoient regardés comme des points.

200. Si le fil passe à travers un ou plusieurs de ces corps, de maniere qu'ils puissent y couler librement, alors comme la direction de la force résultante des mouvemens perdus à chaque instant passe (*art.* 153) par le point de concours G (Fig. 67) des lignes CS, AR, & divise cet angle en deux également; il faudra, au lieu de cette force résultante, imaginer deux puissances égales qui tirent suivant SG, & RG dans la direction des fils CS, AR; de plus si on suppose que SV, RN soient les chemins des points S, R, & qu'on mene les perpendiculaires VD, NP, on aura, à cause de $AR + SC$ constante, $SD = RP$. Moyennant ces deux remarques, on viendra aisément à bout de démontrer dans tous les cas, la conservation des forces vives.

De la conservation des forces vives dans le choc des Corps élastiques.

201. Nous pourrions démontrer la conservation des forces vives dans le choc des corps élastiques, en regardant ces corps comme durs, & supposant que la compression

Digitized by Google

preſſion & la reſtitution du reſſort ſe fît dans un inſtant, nous avons même déja donné dans l'article 189 un eſſai de démonſtration de cette eſpece ; mais comme nous avons obſervé (*art.* 176 *& ſuiv.*) que cette hypotheſe pourroit tromper ſur les véritables loix du choc des corps élaſtiques, nous l'abandonnerons ici, & nous démontrerons la propoſition dont il s'agit, en ſuppoſant un reſſort placé entre les deux corps, & qui leur donne en ſens contraires des forces motrices égales.

202. Soient A, B (Fig. 68), deux points unis par un reſſort AB, leſquels ayant reçû des impulſions quelconques AG, BF, décrivent les courbes Ama, BMb pendant le tems de la compreſſion & de la reſtitution du reſſort : ſoit φ la force motrice variable, qui eſt égale à chaque inſtant pour les deux corps, & qui les pouſſe en ſens contraires dans la direction du reſſort Mm, V la viteſſe de M, u celle de m, G la viteſſe de B, g celle de A, MV, dz, mu, dx, on aura $BVV = BGG - 2\int\varphi\, dz$, & $Auu = Agg + 2\int\varphi\, dx$. Mais lorſque $ab = AB$, on a $2\int\varphi\, dx - 2\int\varphi\, dz = 0$; car $dx - dz$ eſt la quantité dont le reſſort ſe comprime ou ſe dilate à chaque inſtant, & quand $ab = AB$, le reſſort eſt remis dans ſon premier état. Donc $Auu + BVV = Agg + BGG$, lorſque la compreſſion eſt finie.

Il eſt clair que cette démonſtration peut s'étendre à tant de points qu'on voudra, liés enſemble d'une maniere quelconque. On voit donc que la conſervation des forces vives a lieu pour des points liés par des reſſorts.

Digitized by Google

Quand les corps ſont finis, il ſuffit (*art.* 198) pour prouver la conſervation des forces vives, de prouver que cette conſervation a lieu dans les points par où paſſe la direction de la force réſultante des forces qui ſe font équilibre; ces points ſont dans l'un & dans l'autre corps le point par lequel ils ſe touchent, & que nous ſuppoſons demeurer toujours le point touchant pendant la compreſſion & la reſtitution, que nous regardons ici comme achevées dans un tems très-court. C'eſt par ces points qu'il faut imaginer que paſſe le reſſort, qui leur communique en ſens contraire à chaque inſtant des forces motrices égales, qui ſe diſtribuent enſuite dans toute la maſſe. Donc ce cas ſe trouve par-là réduit au précédent.

203. Si les corps A, B (Fig. 69) ſe choquoient par le moyen d'une verge CBA fixe en C, alors les forces motrices appliquées en A & en B ne ſeroient plus égales, mais elles ſeroient en raiſon inverſe des bras CA, CB, & comme les chemins des points B & A en tems égaux, ſont en raiſon directe de ces bras de levier; il s'enſuit que le produit des forces motrices par le chemin des points A, B ſeroit égal de part & d'autre. Ainſi on peut encore ici démontrer la conſervation des forces vives, ſoit par le principe de l'*art.* 189, en ſuppoſant les corps incompreſſibles, ſoit en imaginant un reſſort infiniment petit placé en A & un autre en B. Ce qu'il eſt inutile d'expliquer plus en détail pour des Lecteurs intelligens.

Donc la conſervation des forces vives aura encore lieu dans le cas dont il s'agit ici; & il eſt clair en combinant

Digitized by Google

les principes établis ci-deſſus, qu'on pourra toujours la démontrer dans le choc des corps élaſtiques.

SCOLIE GÉNÉRAL.

204. Il réſulte de tout ce que nous avons dit juſqu'à préſent, qu'en général la conſervation des forces vives dépend de ce principe, que quand des puiſſances ſe font équilibre, les viteſſes des points où elles ſont appliquées, eſtimées ſuivant la direction de ces puiſſances, ſont en raiſon inverſe de ces mêmes puiſſances. Ce principe eſt reconnu depuis long-tems par les Géometres pour le principe fondamental de l'équilibre; mais perſonne, que je ſache, n'a encore démontré ce principe en général, ni fait voir que celui de la conſervation des forces vives en réſulte néceſſairement.

Le principe de l'équilibre dont nous venons de parler, peut toujours ſe démontrer facilement. Car, ou les puiſſances ſont égales & directement oppoſées, ou elles ſont appliquées à des bras de levier différens, ou enfin la force réſultante de ces puiſſances paſſe par quelque obſtacle fixe & inſurmontable, comme dans le Problême X. Tout ce que nous avons dit ci-deſſus eſt, ce me ſemble, ſuffiſant pour démontrer les deux premiers cas: à l'égard du dernier cas, il eſt viſible que les puiſſances décompoſées dans une direction perpendiculaire à la force réſultante ſeront égales, & que les viteſſes dans ce même ſens ſeront égales auſſi. Or de là il eſt aiſé de tirer la démonſtration en la cherchant ſur quelque cas, par

exemple ſur celui du Problême X. où elle eſt aiſée à trouver.

Si la force accélératrice qui anime les corps eſt la gravité g, & que x, z &c. ſoient les abſciſſes verticales des courbes qu'ils décrivent, on aura (*art.* 191) $AVV + avv$ &c. $= 2Agx + 2agz$ &c. en ſuppoſant, comme dans la démonſtration de cet *art.* 191, que les corps partent du repos; & ſi les corps partoient avec les viteſſes initiales B, b, on auroit $AVV + auu$ &c. $= ABB + abb + 2Agx + 2agz$ &c. Il eſt à remarquer que ſi z eſt négative par rapport à x, c'eſt-à-dire ſi le corps a monte tandis que le corps A deſcend, il faudra mettre $-2agz$. Par exemple ſi deux corps égaux ſont attachés à un levier dont les bras ſoient c, e, & que celui de ces deux corps qui agit par le plus long bras de levier c, entraîne l'autre & le force à ſe mouvoir de bas en haut, on aura $AVV + Auu$ ou $AVV + \frac{AVVee}{cc} = 2gAx - 2gAz = 2gAx - \frac{2gAex}{c}$; d'où l'on tire $VV = \frac{2gx(cc - ce)}{cc + ee}$; équation qu'on trouveroit aiſément d'ailleurs, ſoit par notre principe, ſoit par d'autres.

Il eſt de plus aiſé de voir que la quantité $2Agx + 2agz$ &c. eſt égale en général au produit de la ſomme des poids par le double de la deſcente du centre de gravité. Car la deſcente du centre de gravité,

comme il eſt aiſé de le démontrer par la Statique, eſt $\frac{Ag\,x + ag\,z \text{ \&c.}}{Ag + ag \text{ \&c.}}$. Ainſi dans le cas où les corps ſont peſans, la ſomme des forces vives à chaque inſtant eſt égale à la ſomme des forces vives initiales, plus à la force vive d'un poids unique égal à la ſomme de tous les poids, lequel deſcendroit librement d'une hauteur égale à la quantité dont le centre de gravité eſt deſcendu.

De la conſervation des forces vives dans les fluides.

205. Soit un vaſe de figure quelconque & indéfini $POTQ$ (Fig. 70) dont la partie $ADCZ$ terminée par les parallèles AD, CZ ſoit remplie de fluide. Soit imaginé ce fluide diviſé en tranches FKG parallèles à AD; & que tous les points de chaque tranche ſoient animés par une force accélératrice repréſentée par l'ordonnée correſpondante kf de la courbe dfb, (les ordonnées ad repréſentant les forces accélératrices poſitives, c'eſt-à-dire qui tendent de L vers B, & les ordonnées kf celles dont la direction eſt en ſens contraire); je dis que ſi le fluide en cet état eſt en équilibre, l'aire ou ſurface $adnmobc$ ſera zéro, c'eſt-à-dire la ſomme des aires poſitives égale à la ſomme des aires négatives.

Car pour l'équilibre, il faut qu'une tranche quelconque FKG ſoit preſſée également de bas en haut, & de haut en bas: or la preſſion de la tranche FKG ſuivant LB, eſt la même que ſi elle étoit chargée du cylindre

$EHFG$, dont le poids, en appellant LK, x, & φ la force accélératrice de chaque tranche, ſera $FG \times \int \varphi dx$, ou $FG \times (adin - nfk)$; on prouvera de même que la preſſion de FG ſuivant BK, ſera $FG(kfm - mog + gcb)$ & comme ces deux preſſions doivent être égales, on aura $adin - nfk = kfm - mog + gcb$, & $adin - nfkm + mog - gcb = 0$. Donc &c. *Ce qu'il falloit démontrer.*

COROLLAIRE I.

206. Si au lieu de la force accélératrice φ on ſubſtitue la petite viteſſe du qui lui ſeroit proportionnelle, le tems étant conſtant, c'eſt-à-dire la petite viteſſe avec laquelle chaque tranche, conſidérée comme iſolée, deſcendroit dans un inſtant, on aura $\int du dx = 0$. Donc ſi le fluide ſe meut vers AB, & que du repréſente la viteſſe perdue ou gagnée par chaque tranche, c'eſt-à-dire (*art.* 60) la viteſſe par laquelle chaque tranche ſeroit reſtée en équilibre avec les autres, on aura $\int du dx = 0$.

COROLLAIRE II.

207. Nous avons fait voir ci-deſſus en général (*art.* 191) que la conſervation des forces vives quand les corps ſont animés par la peſanteur ou par une force accélératrice quelconque, dépend de la conſervation des forces vives quand il n'y a point de forces accélératrices. Nous nous contenterons donc de prouver, que ſi un fluide $ADCZ$, pouſſé & mis d'abord en mouvement par quelque cauſe

Digitized by Google

(comme par un piston) se meut dans le vase *POTQ*, abstraction faite de la pesanteur, la conservation des forces vives aura lieu.

Pour cela, nous imaginerons le fluide partagé en tranches égales & infiniment petites, dont la masse sera appellée m, & dont l'épaisseur sera dx & y la largeur; on aura ainsi $m = y\,dx$. Si on appelle u la vitesse de chaque tranche, & $u + du$ sa vitesse dans l'instant suivant; il faudra par notre principe, que les tranches animées des vitesses du se fassent équilibre, c'est-à-dire que $\int du\,dx$ sera $= 0$ (*Cor. précéd.*). Mais pour démontrer la conservation des forces vives, il faut prouver (61) que $\int mu\,du = 0$: or $u = \frac{1}{y}$, puisque la vitesse de chaque tranche est en raison inverse de sa largeur; $m = y\,dx$; donc $\int mu\,du = \int du\,dx = 0$. Donc &c.

AVERTISSEMENT.

M. *Daniel Bernoulli* dans son excellent Ouvrage qui a pour titre: *Hydrodynamica* &c. a tiré les loix du mouvement des fluides dans des vases, de la conservation des forces vives, mais sans la démontrer. Comme notre principe général exposé *art.* 60. nous a conduit à en trou-

(61) Si $\int mu\,du = 0$, & qu'on nomme u' la vitesse de la même tranche dans l'instant suivant, on aura (en faisant $y\,dx$ ou m constant, ce qui est permis), $\int \frac{mu'u' - muu}{2} = 0$ (puisque $\frac{mu'u' - muu}{2} = mu\,du$); donc $\int mu'u' = \int muu$.

ver la démonſtration, il eſt évident que nous aurions pû déduire immédiatement de ce même principe le mouvement du fluide, ce qui auroit encore été plus lumineux & plus direct. Mais comme notre deſſein n'eſt point de traiter ici des fluides, nous nous ſommes contentés de faire voir en deux mots l'uſage de notre principe dans une matiere qui paroît ſi épineuſe. Nous nous contenterons donc ici de ce leger eſſai, & nous renverrons ceux qui déſireroient un plus grand détail, à notre *Traité de l'équilibre & du mouvement des Fluides*, dans lequel nous avons déduit de notre principe général, la ſolution des Problêmes les plus difficiles qu'on ait juſqu'à préſent propoſés ſur cette matiere.

F I N.

Quoique

Digitized by Google

Quoique l'Écrit ſuivant ſoit étranger à l'objet de ce Traité, cependant comme il a trop peu d'étendue pour être publié ſéparément, & qu'il a rapport au dernier Ouvrage que j'ai mis au jour, j'ai cru qu'on me permettroit de l'inſérer ici.

LES réflexions que j'ai faites ſur les Tables de la Lune, dans la troiſiéme Partie de mes *Recherches ſur le ſyſtême du Monde*, publiée en 1756, ont donné lieu à quelques obſervations, auxquelles je vais tâcher de répondre ; & j'eſpere que cette réponſe ſuffira, ſans multiplier davantage les écrits, pour mettre au fait des queſtions controverſées, le petit nombre de Juges qui ſont à portée d'en connoître.

I. Si le Problême des mouvemens de la Lune, ſur lequel pluſieurs Géometres ſe ſont exercés, pouvoit être réſolu exactement & rigoureuſement, il n'y auroit entre ces Géometres aucun ſujet de partage ſur le degré de perfection dont la ſolution eſt ſuſceptible. Mais dans l'état où eſt aujourd'hui l'Analyſe, le Problême dont il s'agit ne peut être réſolu que par approximation, c'eſt-à-dire d'une maniere qui eſt toujours néceſſairement imparfaite. Or il m'a paru, & je n'en répéterai point ici les raiſons qui, ce me ſemble, ne peuvent être combattues, que la multitude des quantités qu'on eſt forcé

de négliger dans ce Problême, jettoit beaucoup d'incertitude sur la valeur des coefficiens des équations qu'on trouve par la théorie; je ne vois pas comment on peut être assuré *à priori* d'avoir déterminé la valeur d'aucun de ces coefficiens à une minute près; il y en a même sur lesquels je crois que l'erreur peut aller fort au-delà, puisque ceux qui prétendent avoir fait ces calculs avec le plus de soin, ont varié quelquefois de deux minutes & plus dans les déterminations successives d'un même coefficient. Je n'ai cependant point donné ces doutes sur l'exactitude *rigoureuse* de la théorie pour des raisons démonstratives, mais pour de fortes présomptions, le seul genre de preuves qu'on puisse employer dans cette matiere. Elles paroissent avoir frappé M. Euler ainsi que moi, comme on le peut voir pag. 18 de la troisiéme Partie de mes *Recherches sur le syſtême du Monde;* & ce grand Analyste s'est exercé assez long-tems sur la théorie de la Lune, pour en connoître parfaitement les difficultés. D'ailleurs il ne faudroit, ce me semble, que l'erreur dans laquelle les Géometres ont été long-tems par rapport au mouvement de l'apogée, pour les rendre très-circonspects dans leurs assertions sur cette matiere; ils ont cru que la théorie ne faisoit trouver que la moitié de ce mouvement, parce qu'ils supposoient faussement que les quantités qu'ils négligeoient ne pouvoient jamais donner qu'un résultat très petit; ce résultat négligé & regardé comme presque insensible, étoit pourtant de près d'un degré & demi; qui osera répondre après cela

Digitized by Google

d'une minute & plus d'erreur dans la valeur des autres coefficiens ? On ſeroit d'autant moins fondé à le prétendre, que la différence, s'il y en a, eſt ici toute à l'avantage du mouvement de l'apogée. Ce mouvement étant très-conſidérable, & de 3° à chaque révolution, il faut néceſſairement ou que la ſolution du Problême de la Lune ſoit mauvaiſe, ou qu'elle donne ce mouvement à peu près tel qu'il eſt; trois ou quatre minutes d'erreur ſur trois degrés ne ſeront ici d'aucune conſidération; mais une ou deux minutes le ſeront ſur certains coefficiens de l'équation lunaire, ſans qu'il en réſulte pour cela d'erreur trop grande ſur le mouvement total de la Lune. En un mot pour pouvoir compter ſur l'exactitude d'un coefficient, il faudroit être aſſuré, 1°. que la ſérie qui exprime ce coefficient eſt *conſtamment* & *rapidement* convergente. 2°. Qu'on n'a négligé dans cette ſérie aucun des termes qui pouvoient être de quelque conſidération. Or je le demande à tous ceux qui ont travaillé à la théorie de la Lune; peut-on jamais reſter ſans nuage ſur ces deux points dans les calculs énormes & très-compliqués que cette théorie demande ? Ce ne ſeroit pas ici le premier Problême qu'on ne pourroit réſoudre par approximation que juſqu'à un certain point, & il n'y auroit à cela rien de ſurprenant. Auſſi les partiſans les plus déclarés & les plus excluſifs de la théorie conviennent-ils que le *ſuccès* ſeul peut en conſtater l'exactitude; pour lors les raiſons de douter céderont aux faits. Mais ils conviendront auſſi que juſqu'à préſent on n'eſt point en-

core arrivé à ce ſuccès; puiſqu'après des calculs immenſes, l'erreur des Tables s'eſt encore trouvée de plus de 4′ ſur 100 obſervations.

II. C'eſt par toutes ces raiſons qu'en publiant mes Tables, je n'ai pas cru devoir rien prononcer ſur leur degré d'exactitude, me contentant d'inviter les Aſtronomes à s'en aſſurer. J'aurois fait moi-même cet examen ſi des occupations indiſpenſables me l'euſſent permis; mais pour le faciliter aux Aſtronomes, j'ai publié au commencement de 1756 des *Tables de correction*, dont le calcul eſt très-expéditif, & par le moyen deſquelles on peut vérifier très-promptement les réſultats de la théorie. Perſonne n'ignore que depuis le commencement de ce ſiécle les Aſtronomes ont obſervé & calculé avec ſoin un grand nombre de lieux de la Lune, & inſcrit dans leurs regiſtres la différence du calcul à l'obſervation; il n'y aura plus qu'à appliquer les Tables de correction aux lieux calculés, pour voir ſi ces Tables donnent le lieu de la Lune plus exactement, ce qui ne demande que très-peu de travail. Cet uſage ſi ſimple & ſi naturel de mes Tables de correction ſuffiroit, non-ſeulement pour juſtifier la peine que j'ai priſe de les dreſſer, mais pour les faire préférer à des Tables entiérement nouvelles, dont la comparaiſon avec les obſervations ſera toujours ſans comparaiſon plus longue & plus épineuſe. C'eſt auſſi cet uſage que j'ai eu principalement en vûe en publiant mes Tables, & qui doit, ce me ſemble, ſauter aux yeux de tous les Géometres &

Digitized by Google

de tous les Aſtronomes ; ce qui me juſtifie ſuffiſamment de n'y avoir pas autant inſiſté que quelques Lecteurs auroient paru le vouloir. Il me ſuffit que ces Lecteurs ne puiſſent ſe diſpenſer de reconnoître cet avantage de mes Tables, & de l'approuver. Mais ce n'eſt pas le ſeul. L'expérience montre que les Aſtronomes ont beaucoup de peine à ſe détacher de la forme de Tables qu'ils ont une fois adoptée, ſurtout lorſqu'ils ne connoiſſent pas aſſez le degré d'exactitude des nouvelles Tables qu'on leur préſente. Ainſi quand ils auront obſervé eux-mêmes un lieu de la Lune, ils trouveront encore plus ſimple de calculer d'abord ce lieu par les Tables dont ils ſe ſervent pour l'ordinaire, d'examiner la différence du lieu calculé à celui qu'ils auront obſervé, & de voir enfin (par un calcul d'un moment) ſi des Tables de correction diminuent ou non cette différence, que de calculer d'abord le lieu de la Lune par de nouvelles Tables qu'on leur aura préſentées.

III. Ces réflexions au reſte tombent beaucoup plus ſur la grande utilité dont peuvent être en général des Tables de correction pour vérifier la théorie, que ſur l'avantage particulier qu'on peut tirer des miennes. Encore une fois, je me ſuis propoſé ſimplement d'offrir aux Aſtronomes dans ces Tables les réſultats que la théorie m'avoit donnés ; tout ce que j'ai dit dans mon Ouvrage, prouve aſſez que je n'ai point prétendu répondre de ces réſultats. Le calcul, par exemple, m'a donné la *variation* ſenſiblement plus petite que dans les autres

Digitized by Google

Tables, & j'ai cru sur des raisons qu'on a trouvées plausibles, & qui le sont en effet, que les Astronomes pouvoient l'avoir faite trop grande. Mais il se pourroit que je l'eusse aussi trop diminuée, & que j'eusse en même-tems un peu trop augmenté l'*évection*. J'avertis cependant que j'ai calculé ces deux élémens avec un soin & une patience extrêmes, en ne négligeant que les quantités du même ordre que la cinquiéme puissance de l'excentricité; & si ces termes négligés avoient pu produire une erreur de deux minutes, je n'en serois que plus convaincu de ce que j'ai avancé sur l'incertitude où l'on est toujours dans la théorie de la valeur des quantités qu'on néglige. Cependant avant que de prononcer définitivement sur la valeur que j'ai donnée à la *variation* & à l'*évection*, il sera bon d'examiner si la différence du lieu calculé au lieu observé, ne viendra pas en très-grande partie des autres termes de l'équation lunaire, dont plusieurs sont jusqu'ici très-incertains, & très-différens dans toutes les Tables. Enfin des Tables de correction, quelles quelles soient, auront toujours un avantage, c'est que les équations en étant fort petites, il sera plus aisé de voir en quoi peuvent pécher ces équations, & de les faire approcher davantage de la vérité, que de pratiquer cette opération sur des Tables entiérement nouvelles. Quand par ces différens moyens, on aura donné aux Tables de correction toute la perfection possible, il sera facile pour lors de les refondre dans les anciennes Tables.

Digitized by Google

IV. Les Tables que j'ai choiſies pour y appliquer des Tables de correction, ſont celles des *Inſtitutions Aſtronomiques*, 1°. parceque ces Tables ſont celles dont les Aſtronomes me paroiſſent faire actuellement le plus d'uſage, le calcul en étant incomparablement plus court que celui de quelques autres Tables publiées depuis. 2°. Parcequ'ayant été comparées à un très-grand nombre d'obſervations dans toutes ſortes de circonſtances, on peut ſe flatter de connoître aſſez-bien le degré d'erreur dont elles ſont ſuſceptibles, & que M. le Monnier aſſure monter rarement à 5′. 3°. Enfin parceque l'erreur de ces Tables eſt toute calculée pour une quantité conſidérable de points. En effet on a déja l'erreur des Tables de Halley pour une période entiere : or l'on ſait que les Tables des *Inſtitutions* ne différent que très-peu de celles de Halley, quant au réſultat & quant à la forme; elles ne s'en écartent que ſur deux points, auxquels il eſt très-aiſé d'avoir égard. On ſait de plus que M. le Monnier continue ſur ſes propres Tables, ce que Halley a fait ſur les ſiennes, pour en déterminer l'erreur à chaque période, & qu'il publie de tems en tems le réſultat de ſon travail.

V. De tous les Mathématiciens qui ont donné en dernier lieu des Tables de la Lune, M. Mayer eſt celui qui ſe flatte le plus d'avoir approché de la vérité. On aſſure que M. Bradley y ayant comparé depuis peu plus de 300 obſervations, n'a pas trouvé une minute de différence; ce qui ſuppoſe, ce me ſemble, que M. Mayer a

Digitized by Google

fait quelques corrections à ſes premieres Tables; car les obſervations qu'il avoit d'abord comparées à ſon calcul (les ſeules qui ayent été publiées juſqu'ici) s'en éloignoient quelquefois de deux minutes, *même dans les Syzygies*. C'eſt cette différence qui avoit principalement fait naître mes premiers doutes ſur l'exactitude des Tables de M. Mayer. Car elles avoient le défaut auquel de bonnes Tables ne paroiſſoient pas devoir être ſujettes, de n'être pas plus exactes dans les ſyzygies qu'ailleurs; & l'exactitude qu'elles donnoient dans les ſyzygies n'étoit gueres plus grande que celle des Tables Newtoniennes, s'il eſt vrai, comme on le prétend, que les premiers Aſtronomes qui avoient borné à 2′ le degré d'erreur de ces dernieres Tables, ne les euſſent gueres vérifiées que dans les ſyzygies. Quoiqu'il en ſoit, bien-loin de refuſer à M. Mayer la juſtice qui lui eſt dûe, je déſire au contraire que l'exactitude de ſes Tables ſoit en effet conſtatée de plus en plus; 1°. Parceque ces Tables ſont de la forme la plus expéditive pour le calcul. 2°. Parceque ſi l'erreur de ces Tables ne va pas au-delà d'une minute, comme on l'aſſure, il n'y a gueres lieu d'eſpérer que la théorie donne jamais une exactitude plus grande; car les Tables formées ſur la théorie préſentent un très-grand nombre de coefficiens, dont aucun, de l'aveu de tout le monde, ne peut être réputé exact à quelques ſecondes près: or quelques ſecondes d'erreur ſur pluſieurs coefficiens feront bien-tôt une minute ſur le total. 3°. Enfin parceque M. Mayer a vrai-ſemblablement dreſſé

Digitized by Google

dreſſé ſes Tables, moitié ſur une théorie qui ne paroît pas avoir été fort rigoureuſe, moitié ſur une eſpece de tâtonnement éclairé par les obſervations; ce qui ſerviroit à confirmer l'opinion où je ſuis, qu'on peut conſtruire plus promptement & plus exactement des Tables de la Lune, en joignant les obſervations à la théorie, qu'en employant la théorie ſeule, ou les obſervations ſeules. Ce n'eſt pas que je ne convienne de la grande utilité, de la néceſſité même de la théorie, pour perfectionner les Tables; ce n'eſt pas non plus que je veuille blâmer les Géometres qui croyent pouvoir s'en contenter. Mais je crois l'autre méthode plus courte & plus ſûre, & c'eſt celle-là que je me propoſe d'employer, ſi mes occupations me permettent de terminer mon travail ſur la Lune; travail qui ne demande plus que de la patience & du tems, & dans lequel je ne ſerai point fâché d'être prévenu par d'autres. Il me ſuffira d'avoir réſolu le Problême des trois corps par une méthode, qui n'eſt je crois inférieure à aucune des méthodes connues, & d'avoir fourni aux Géometres, comme je l'ai fait, un grand nombre de vûes pour tirer tout le parti poſſible de la ſolution de ce Problême, vainement cherchée juſqu'à ces derniers tems.

VI. Il n'eſt pas douteux qu'il n'entre d'autres quantités que l'excentricité dans l'équation du centre de la Lune; il ne faut qu'avoir calculé avec exactitude cette équation pour en être convaincu. On peut même prouver qu'en ayant égard à cette remarque, & réduiſant

toutes les Tables à la même forme, les différentes équations du centre s'accordent à très-peu-près. Mais cela n'a pas dû m'empêcher de dire un mot de la diverſité entre les excentricités trouvées par différens Géometres & Aſtronomes, & d'en laiſſer, comme je l'ai fait, la déciſion aux obſervateurs à venir; cet élément de la théorie de la Lune ne pouvant être trop examiné.

VII. La comparaiſon des deux méthodes dont on peut ſe ſervir pour trouver l'erreur du mouvement moyen, eſt en elle-même peu importante, puiſqu'on eſt à peu près le maître de préférer celle des deux qu'on juge à propos; j'ai donc cru qu'il étoit inutile d'employer une méthode ſevere & pénible pour cette comparaiſon; & je lui en ai préféré une autre, moins rigoureuſe à la vérité, mais auſſi d'une utilité plus générale, & qui donne lieu, comme on en eſt convenu, à des remarques curieuſes. D'ailleurs les Aſtronomes différent entr'eux de près de 15″ ſur la quantité qu'il faut ajoûter au lieu moyen pour corriger les Tables de Halley; il auroit fallu diſcuter les raiſons de cette différence, & cette diſcuſſion m'auroit mené trop loin, d'autant qu'elle n'étoit pas eſſentielle.

VIII. Quand j'ai donné une méthode plus abrégée que celle des *Inſtitutions* pour calculer le lieu de la Lune, je n'ai pas prétendu que le réſultat des deux méthodes dût être abſolument le même; cela n'eſt nullement néceſſaire; il ſuffit que la différence des réſultats ſoit d'un côté conſidérablement plus petite que le ré-

Digitized by Google

ſultat total, & de l'autre fort au-deſſous de l'erreur dont les Tables des *Inſtitutions* ſont ſuſceptibles. Il y a de plus deux manieres de ſimplifier des Tables; ſoit en réduiſant pluſieurs équations à une ſeule, qui donnent ou exactement, ou à peu près le même réſultat; ſoit en retranchant celles qui paroiſſent n'être pas néceſſaires; c'eſt pour cette derniere raiſon que j'ai retranché quelques équations, comme une ſeconde équation du moyen mouvement que le calcul m'a fait trouver trop petite pour mériter attention. Au reſte il me ſeroit aiſé de prouver (mais cela eſt en ſoi fort peu important) que j'avois trouvé les abrégés dont il s'agit, avant la publication des Tables de M. Mayer.

IX. La méthode de trouver les coefficiens des équations lunaires par la théorie, ne peut être pratiquée que par un très-petit nombre de Géometres. Au contraire celle que j'ai donnée de trouver ces coefficiens par les ſeules obſervations, peut être miſe en uſage à la fois par un très-grand nombre d'Aſtronomes, en ſe ſervant de tous les moyens de ſimplification que je leur ai fournis. Sans être attachés à aucune théorie, ils auront du moins l'avantage de connoître déja à peu près par les différentes théories qui ont été publiées la valeur des principaux coefficiens, & cette connoiſſance peut abréger & ſimplifier leur travail. Un tâtonnement éclairé pourra leur apprendre le reſte; & pourquoi ne s'en flatteroit-on pas, lorſqu'on voit ce qu'un pareil tâtonnement a donné vraiſemblablement d'exactitude aux Tables de M. Mayer?

Digitized by Google

D'ailleurs c'eſt pour fournir aux Aſtronomes tous les ſecours qu'ils peuvent attendre de l'analyſe, que j'ai donné la méthode dont il s'agit. Dans une matiere telle que celle-ci, on ne ſauroit ſe procurer un trop grand nombre de reſſources, & de trop d'eſpeces. C'eſt par la même raiſon que j'ai donné en paſſant la méthode de dreſſer des Tables d'après la formule du lieu moyen, dont on ne peut conteſter l'utilité, au moins quand il ſera queſtion de trouver le tems par le lieu.

X. Si je n'ai point conſtruit des Tables du mouvement horaire, c'eſt qu'il m'a paru que tout Aſtronome pouvoit les conſtruire avec beaucoup de facilité & de promptitude, par la méthode fort ſimple que j'ai expliquée. Au reſte je ne puis croire (vû le peu de certitude qu'on a ſur l'exactitude des coefficiens) que la théorie donne, au moins juſqu'ici, le mouvement horaire à une ſeconde près; une minute d'erreur ſur la ſeule *variation*, donne plus d'une ſeconde d'erreur dans le mouvement horaire, & il eſt aiſé de juger par la ſeule inſpection des différentes Tables publiées juſqu'ici, que ces Tables doivent différer de pluſieurs ſecondes dans la détermination de ce mouvement. Je ne croi pas non plus que dans aucun cas, par exemple dans la recherche de la parallaxe, il ſoit néceſſaire d'avoir égard aux erreurs d'une ſeconde dans la détermination du mouvement horaire, tant à cauſe de l'incertitude qui reſte encore dans ce mouvement, que parce qu'il s'en faut beaucoup qu'on puiſſe déterminer à une ſeconde près la parallaxe, cet élément ſi incertain par tant de raiſons.

Digitized by Google

XI. Je finirai par une réflexion qui ne doit pas être paſſée ſous ſilence. Les différens objets de conteſtation agités aujourd'hui entre les Géometres ſur la théorie de la Lune, ne doivent pas paroître ſurprenans, puiſqu'ils roulent ſur des points que le calcul & l'obſervation n'ont pas encore ſuffiſamment décidés, & ſur leſquels il n'eſt pas étonnant qu'on ſe partage aujourd'hui, pour ſe rapprocher ſans doute un jour, lorſque le tems aura pleinement fixé tout ce qu'on peut attendre de la théorie. Mais un point eſſentiel, & dont tous les Géometres conviennent unanimement, c'eſt que la théorie, dans l'état où elle eſt, fournit les preuves les plus convaincantes du ſyſtême de la gravitation, & de l'accord de ce ſyſtême avec les mouvemens de la Lune.

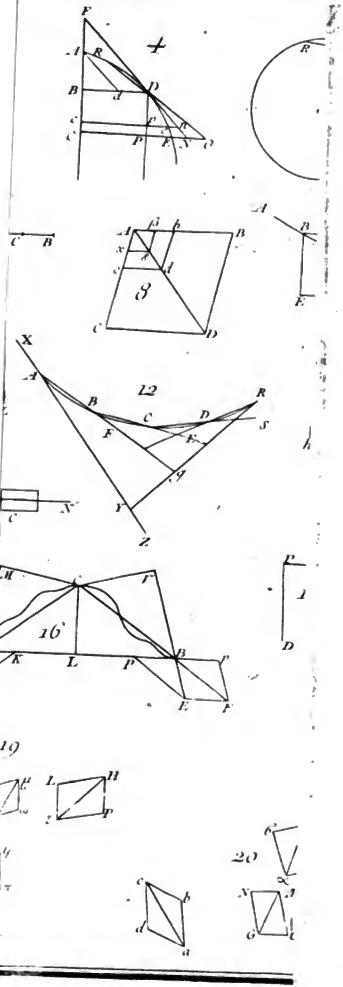
De l'Imprimerie de J. CHARDON.

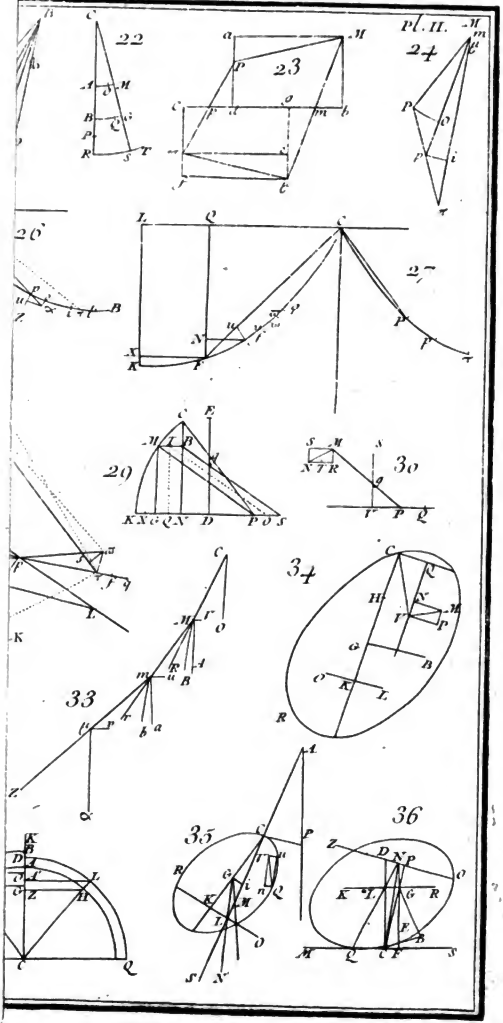
Digitized by Google

Digitized by Google

Digitized by Google

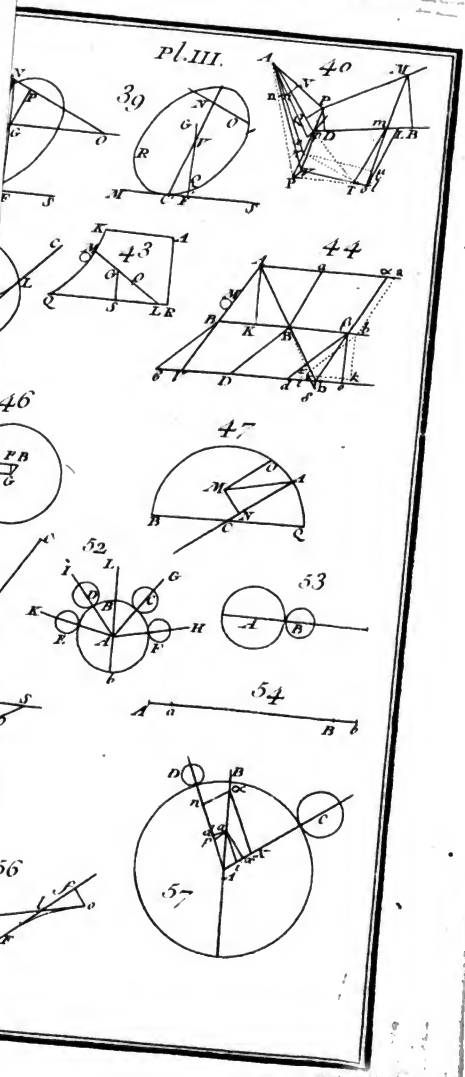
Digitized by Google


4
8
12
16
19
20

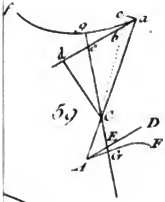


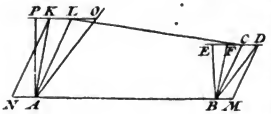
Digitized by Google

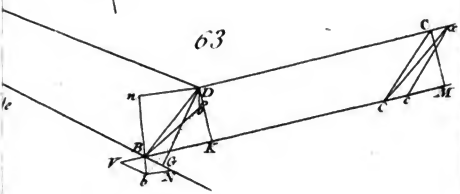
Digitized by Google

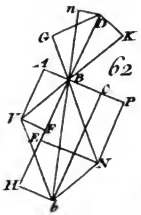

Pl. III.
39
40
43
44
46
47
52
53
54
51
56
57

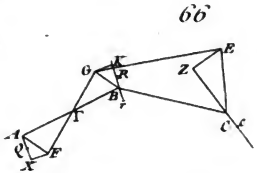
Digitized by Google

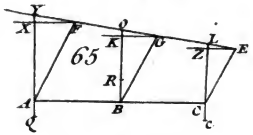


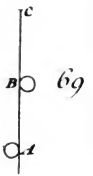


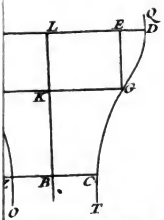


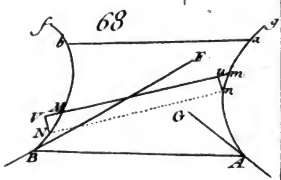












Digitized by Google

Digitized by Google

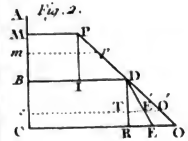


Fig. 2.

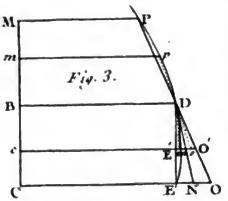
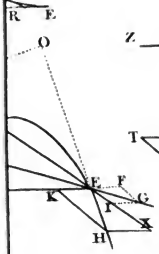


Fig. 3.



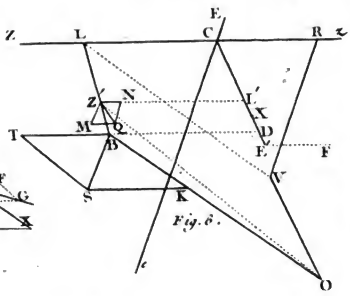


Fig. 6.

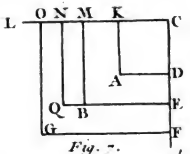
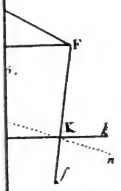


Fig. 7.



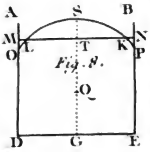


Fig. 8.

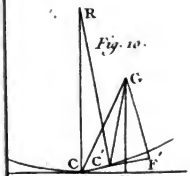


Fig. 10.

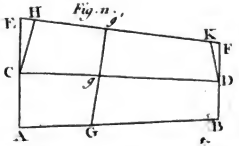
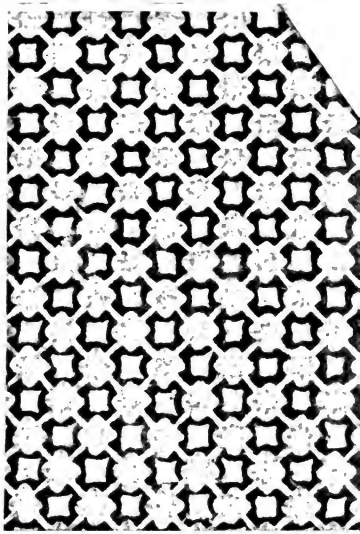


Fig. n.

Digitized by Google

Digitized by Google

Digitized by Google



005662073

C3
Digitized by Google